Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Grupos y Teoría de Galois
Primer semestre de 2020

Práctico 1

1. Sea $G = \{a + b\sqrt{2} :\ a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$. Probar que G con la suma es un grupo. Probar que el conjunto $G^{\times} = \{x \in G :\ x \neq 0\}$ con el producto es un grupo.

2. Sa $G = \{x \in \mathbb{R} :\ 0 \leq x < 1\}$. Si $x, y \in G$, definimos $x * y = x + y - [x + y]$, siendo $[a]$ la parte entera de $a \in \mathbb{R}$. Probar que $*$ está bien definida y que con esta operación G es un grupo.

3. Se considera el grupo diedral $D_n = \langle \rho, \sigma \rangle$ en el cual $\rho^n = \sigma^2 = \mathrm{id}$ y $\rho\sigma = \sigma\rho^{n-1}$. Probar $\rho^l\sigma = \sigma\rho^{n-l}$, $l = 0, \ldots, n-1$. Probar que si n es par, entonces $\rho^{n/2}\varphi = \varphi\rho^{n/2}$, para todo $\varphi \in D_n$.

4. Probar que si G es un grupo tal que $g^2 = 1$ para todo $g \in G$, entonces G es abeliano.

5. Sea G un grupo y $g \in G$ un elemento de orden impar. Probar que existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $g = \left(g^2\right)^k$.

6. Sea G un grupo y $g, f \in G$. Probar $\left|g^{-1}\right| = |g|$, $\left|gfg^{-1}\right| = |f|$ y $|gf| = |fg|$.

7.
   a) En el grupo $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ se consideran $a = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $b = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Probar $|a| = 4$, $|b| = 3$ y $|ab| = \infty$.

   b) Dar un ejemplo de un grupo G y $a, b \in G$ tales que $|a| = |b| = \infty$, $b \neq a^{-1}$ y $|ab| < \infty$.
   Sugerencia: considerar $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$.

8. Probar que si un grupo G contiene dos elementos g, f que conmutan entre sí y sus órdenes son finitos, entonces gf tiene orden finito. Si además sus órdenes son primos entre sí, probar $|gf| = |g|\,|f|$.

9. El *grupo de los cuaternios* Q es el subgrupo de $GL_2(\mathbb{C})$ generado por $a = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $b = \left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

   a) Probar $ba = a^3b$, $a^2 = b^2$ y $a^4 = 1$, siendo 1 la matriz identidad.

   b) Probar $Q = \{1, a, a, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$ y que Q es un grupo no abeliano de orden 8.

   c) Hallar los subgrupos $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$ y $\langle ab \rangle$, en términos de la descripción anterior de Q.

10. Hallar los órdenes de los elementos de Q y de D_4. Concluir que Q y D_4 no son isomorfos.

11. Sea G un grupo finito de movimientos del plano. Probaremos que G es un grupo cíclico o diedral.

    a) Sea $p \in \mathbb{R}^2$ un punto arbitrario. Consideramos $c = \frac{1}{|G|}\sum_{\varphi \in G} \varphi(p)$. Probar $\varphi(c) = c$, $\forall \varphi \in G$.
    Sugerencia: recordar que si $\varphi \in \mathcal{M}$, entonces existen únicos $w \in \mathbb{R}^2$ y $\varphi_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operador ortogonal tales que $\varphi(v) = \varphi_0(v) + w$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

    b) Concluir que G está formado solo por rotaciones o simetrías axiales.

    c) Supongamos que en G solo hay rotaciones. Sea $H = \{\theta \in \mathbb{R} :\ \rho_{c,\theta} \in G\}$. Probar $H < \mathbb{R}$ y deducir[1]que existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $H = \alpha\mathbb{Z}$. Observando $2\pi \in H$, concluir $G = \left\langle \rho_{c,\frac{2\pi}{m}} \right\rangle$, para cierto $m \in \mathbb{Z}^+$.

    d) Probar que si G contiene alguna simetría axial, entonces G es el grupo diedral D_{2m}.

12. Probar que si H es un subgrupo del grupo diedral D_n, entonces H es cíclico o es un grupo diedral.

[1]Usar que todo subgrupo de $\mathbb{R}$ es de la forma $\alpha\mathbb{Z}$ o es denso en $\mathbb{R}$.