Clase de consulta

5) b) $L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

$v \mapsto Av$

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to L_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+y \end{pmatrix}$

$T(x,y) = (x+2y, 2x+y)$

1) Hallar vectores propios. v_1, v_2

2) $B = \{v_1, v_2\}$ base de $\mathbb{R}^2$ formado por vectores propios

3) Aplicar G-S, y normalizar

→ No afecta que sean vectores propios o no

→ ¿Luego de aplicar G-S, los vectores siguen siendo propios?

$\{v_1, v_2\}$ base formado por vectores propios.

$w_1 = v_1 \to w_1$ vector propio

$n = 2$

$w_2 = v_2 - \frac{\langle w_1, v_2 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1$

$L_A(w_2) = L_A(v_2) - \frac{\langle w_1, v_2 \rangle}{\|w_1\|^2} L_A(w_1)$

$$= \lambda_2 v_2 - \frac{\langle w_1 v_2 \rangle}{\|w_1\|^2} \lambda_1 w_1 = \lambda_2 \left[v_2 - \frac{\langle w_1, v_2 \rangle w_1}{\|w_1\|^2} \right]$$

$L_A(w_2) = \alpha_2 w_2 = \alpha_2 \left(v_2 - \frac{\langle w_1 v_2 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 \right)$

$E_{\lambda_1} = \{ v \in V : T(v) = \lambda_1 v \}$

Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$ normal, $L_A = \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $L_A(v) = Av$

Sea $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ valores propios distintos $1 \le s \le n$

Si $s = n$, es decir tengo n vap. distintos, entonces como $E_{\lambda_i} \perp E_{\lambda_j}$ $i \neq j$ (L_A normal)

Entonces $\{v_1, \dots, v_n\}$ vectores propios son una base ortogonal. Luego, normalizar.

Si $s < n$. Sabemos que $E_{\lambda_i} \perp E_{\lambda_j}$.

Sean $\{v_{\lambda_{i1}}, \dots, v_{\lambda_{ij}}\}$ los vectores propios asociados a λ_i.

Caso $n=1$ trivial, $n=2$

$$L_A(w_n) = L_A(v_n) - L_A\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i \right)$$

$$= \lambda_n v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} L_A(w_i)$$

$\to \lambda_i w_i$

$$= \lambda_n \left[v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i \right]$$

Resumen: Si $v_i \in E_{\lambda_i}$, $v_j \in E_{\lambda_j}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ ya está (hay que normalizar)

Si $\{v_{\lambda_{i1}}, \dots, v_{\lambda_{il}}\} \in E_{\lambda_i}$, entonces aplico G-S y normalizo

Sean $\{t_1, \ldots, t_s\}$ vec. prop. t_q $[\{t_1, \ldots, t_s\}] = E_\lambda$

Probaremos por inducción, que si aplicamos G-S obtenemos un conjunto ortogonal formado por vectores propios. → con valor propio λ

Caso base: Paso 1: $w_1 = t_1 \rightarrow w_1$ es vector propio

Paso 2: $w_2 = t_2 - \frac{\langle t_2, w_1 \rangle}{\| w_1 \|^2} w_1$

$$L_A(w_2) = L_A(t_2) - \frac{\langle t_2, w_1 \rangle}{\| w_1 \|^2} L_A(w_1)$$

$$= \lambda t_2 - \frac{\langle t_2, w_1 \rangle}{\| w_1 \|^2} \lambda w_1$$

$$= \lambda \underbrace{\left[t_2 - \frac{\langle t_2, w_1 \rangle}{\| w_1 \|^2} w_1 \right]}_{w_2}$$

$L_A(w_2) = \lambda w_2$ → w_2 es vector propio con valor propio λ.

$\mathbb{C}^3$: $\{\underbrace{v_{\lambda_1 1}, v_{\lambda_2 2}}_{\substack{G-S \\ \text{normalizo}}}, v_{\lambda_2}\}$ → Normalizo

6.10)

T, S autoadjuntos;

Usamos $\langle u, v \rangle' = \langle S^{-1}(u), v \rangle$

$$\langle S \circ T(u), v \rangle' = \langle S^{-1} \circ S \circ T(u), v \rangle$$

$$= \langle T(u), v \rangle$$

$$= \langle S \circ S^{-1} \circ T(u), v \rangle$$

$$= \langle S^{-1} \circ T(u), S(v) \rangle$$

$$= \langle T(u), S(v) \rangle'$$

$$= \langle u, T \circ S(v) \rangle'$$

Autoadjunto TS

$$= \langle T \circ S(u), v \rangle'$$

$$\langle ST(u), v \rangle' = \langle TS(u), v \rangle'$$

T y S son autoadjuntos

$$= \langle S(u), T(v) \rangle'$$

$$= \langle u, ST(v) \rangle'$$

$\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ bon para $\langle \, , \rangle$

$$v_o = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\langle v_o, w_i \rangle}_{\text{coef. de Fourier}} w_i$$

Conocemos, $u, v, \langle u, v \rangle'$: Queremos v_o tq $\langle u, v \rangle' = \langle u, v_o \rangle$

6.7)

a) S autoadjunto ; S^2 es autoadjunto

$\langle S^2(v), v\rangle \geq 0$

$\Rightarrow$ $\langle S\circ S(v), u\rangle = \langle S(v), S(u)\rangle$
$= \langle v, S\circ S(u)\rangle$

$\Rightarrow$ $\langle S^2(v), v\rangle = \langle S(v), S(v)\rangle = \|S(v)\|^2 \geq 0$
$\forall v\in V$

b) Sea T semipositivo, i.e. T autoadjunto,

$\exists$ $\mathcal{B}$ b.o.n. $[T]_{\mathcal{B}} = \underline{diag(\lambda_1, ---, \lambda_n)}$

Sea $S\in L(V)$ con matriz asociada

$[S]_{\mathcal{B}} = diag(\sqrt{\lambda_1}, ---, \sqrt{\lambda_n})$

$[S^2]_{\mathcal{B}} = [S\circ S]_{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}}^2 = diag(\lambda_1, --, \lambda_n)$
$= [T]_{\mathcal{B}}$

$\Rightarrow$ $S^2 = T$

2.c) T invertible $\Rightarrow$ T^* es invertible

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$$

Veamos que TT^* es autoadjunto:

$$\langle TT^*(v), u\rangle = \langle T^*(v), T^*(u)\rangle$$

$$= \langle v, \underline{(T^*)}^* T^*(u)\rangle$$

$(T^*)^* = T$ porque $\dim V < \infty$

$$= \langle v, TT^*(u)\rangle$$

$$\langle TT^*(v), v\rangle = \langle T^*(v), T^*(v)\rangle = \|T^*(v)\|^2 \geq 0 \quad \forall v \in V$$

Si T es invertible, es inyectiva, i.e. $T(v) \neq 0_V$ $\forall v \neq 0_V$

$$\underbrace{\langle TT^*(v), v\rangle = \|T^*(v)\|^2 > 0 \quad \forall v \neq 0_V}_{\text{def positivo}}$$