26/8:

Práctico 1

1) $V = U \oplus W \to V = \{v = u + w : u \in U, w \in W\}$

$T : V \to V,$

$v = u + w \mapsto w$

i) T lineal: • $T(0) = T(0 + 0) = 0$

• $T(v_1 + v_2) = T(\underbrace{u_1 + w_1}_{v_1} + \underbrace{u_2 + w_2}_{v_2})$

$= T(\underbrace{u_1 + u_2}_{\in U} + \underbrace{w_1 + w_2}_{\in W})$

$= w_1 + w_2 = T(u_1 + w_1) + T(u_2 + w_2) = T(v_1) + T(v_2)$

• $v \in V$, $\lambda \in K$: $T(\lambda v) = T(\lambda(u + w)) = T(\lambda u + \lambda w) = \lambda w$

$= \lambda T(u + w)$

$= \lambda T(v)$

Entonces T es lineal, falta probar

$T^2 = T$ $\}$ $T \circ T = T$

$\boxed{T^2 = T \circ T}$

$T(v) = T(u+w) = w$

$T \circ T(v) = T(w) = T(0+w) = w$ $\Big\}$ $T^2 = T$

$T: U \oplus W \to U \oplus W$

Detalle técnico.

Equivalente

$T \circ T(v) = T(T(v)) = T(w) = T(0+w) = w$

b) $Ker(T) = N(T) := \{v \in V : T(v) = 0_v\}$

$Im(T) = \{v \in V : \exists \bar{v} \in V \text{ con } T(\bar{v}) = v\}$

• Queremos ver que $Ker(T) = U$, necesitamos probar

$\underbrace{Ker(T) \subset U}_{\text{I}}$ y $\underbrace{U \subset Ker(T)}_{\text{II}}$.

Esto es porque $V = U \oplus W$

definición

I) Sea $v \in Ker(T)$ $[T(v) = 0]$, $v = u + w \Rightarrow T(u+w) = w$

Entonces si $\underset{\substack{\| \\ 0}}{T(v)} = T(u+w) = w$ $\Big\}$ $w = 0 \to v = u \in U$

$v \in Ker(T)$

II) Sea $u \in U$, $U \subset V = U \oplus W$, entonces existe un único $w \in W$ tal que $u = \tilde{u} + w$, $\boxed{u = u + 0}$ ← Esto siempre es cierto

Por unicidad $w = 0$, $\underset{\substack{\| \\ T(u)}}{T(u+0)} = 0$ $\to u \in Ker(T)$

$v = u + w \to u = v - w \to T(u) = T(v) - T(w) = w - w = 0$

$0 + w$

$\cdot\ Im(T) = W$ si y sólo si $\underbrace{Im(T) \subset W}_{\mathrm{I}}$, $\underbrace{W \subset Im(T)}_{\mathrm{II}}$

I) Sea $v \in Im(T)$, es decir $\exists\ \bar{v} \in V$ tal que $\overline{T(\bar{v}) = v}$

Como $V = U \oplus W$:

$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$

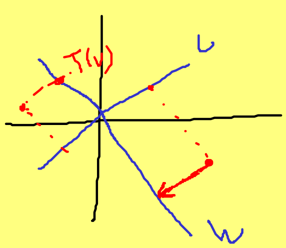
$$\underset{\overset{\|}{v}}{T(\bar{v})} = T(\bar{u} + \bar{w}) = \bar{w} \quad \to \quad v = \bar{w} \in W \Rightarrow Im(T) \subset W.$$

II) Sea $w \in W$, $W \subset V = U \oplus W$, entonces podemos escribir

$w = 0 + w$. Luego $w = 0 + w \to T(0 + \overset{\bar{w}}{w}) = w$

Encontramos $\bar{w} \in V$ tal que $T(\bar{w}) = w$, entonces $w \in Im(T)$

Entonces $W \subset Im(T)$



$T: \underset{\overset{\|}{U \oplus W}}{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}^2$, $T(u+w) = u$

Obs: $\mathcal{L}(V)$ es el espacio vectorial de $T: V \to V$ lineales, con $+: V \times V \to V$, $T+S(v) = T(v) + S(v)$

$\cdot: K \times V \to V$ $(\lambda T)(v) = \lambda T(v)$

. Un operador es un elemento de $\mathcal{L}(V)$

Ej 2: $T \in \mathcal{L}(V)$ una proyección $\boxed{(T^2 = T)}$

$v = v \underbrace{- T(v) + T(v)}_{= 0}$; aplicamos T:

$$T(v) = T(v - T(v) + T(v)) \overset{T \text{ lineal}}{=} T(v) - T(T(v)) + T(T(v))$$

$$= \underbrace{T(v) - T^2(v)} + T^2(v)$$

$$\overset{T \text{ proyección}}{=} \underbrace{T(v) - T(v)}_{= 0} + T(v) = T(v)$$

$$0 = T(v) - T(v) = T(v) - T^2(v) \underset{\text{lineal}}{=} T(v - T(v)) = 0 \to v - T(v) \in Ker(T)$$

$$v = \overbrace{v - T(v)}^{Ker\, T} + \overbrace{T(v)}^{Im\, T} \to V = Ker\, T + Im\, T$$

Queremos ver que $V = Ker\, T \oplus Im\, T$, nos alcanza con ver

$Ker\, T \cap Im\, T = \{0_V\}$

Sea $v \in \operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Im} T$, $\qquad v \in \operatorname{Ker} T \Rightarrow T(v) = 0$

$v \in \operatorname{Im} T \Rightarrow \exists\, \bar{v} \in V$ tal que $\underline{T(\bar{v}) = v}$

$$T^2(\bar{v}) = T(\overbrace{T(\bar{v})}^{v}) = T(v) \overset{v \in \operatorname{Ker} T}{=} 0$$

$\| \leftarrow$ Es proyección

$T(\bar{v})$

$$\left.\begin{array}{l} T(\bar{v}) = v \\ T(\bar{v}) = 0 \end{array}\right\} \quad v = 0$$

Por def de función.

$T(\bar{v}) = v$ para un único v

3) $T, S : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$

$$T(a+bx+cx^2) = -b+bx-bx^2$$

$$S(a+bx+cx^2) = a+b \;+(b+c)x^2$$

a) $T(a+bx+cx^2 + \bar{a}+\bar{b}x + \bar{c}x^2) =$

$= T(a+\bar{a} + (b+\bar{b})x + (c+\bar{c})x^2) = -(b+\bar{b}) + (b+\bar{b})x - (b+\bar{b})x^2 =$

$= -b+bx-bx^2 - \bar{b}+\bar{b}x - \bar{b}x^2 = T(a+bx+cx^2) + T(\bar{a}+\bar{b}x+\bar{c}x^2)$

$T(\lambda(a+bx+cx^2)) = T(\lambda a + \lambda b x + \lambda c x^2)$

$= -\lambda b + \lambda b x - \lambda b x^2$

$= \lambda[-b+bx-bx^2] = \lambda\, T(a+bx+cx^2)$

El S es igual.

Veamos que $T^2 = T$.

$T^2(a+bx+cx^2) = T(T(a+bx+cx^2)) = T(-b+bx-bx^2) = -b+bx-bx^2$

$= T(a+bx+cx^2)$

Veamos $S^2 = S$

$S^2(a+bx+cx^2) = S(S(a+bx+cx^2)) = S(a+b+(b+c)x^2)$

$S(a+bx+cx^2) = a+b+(b+c)x^2$

$= a+b+0+(b+c+0)x^2$

$= a+b+(b+c)x^2 = S(a+bx+cx^2)$