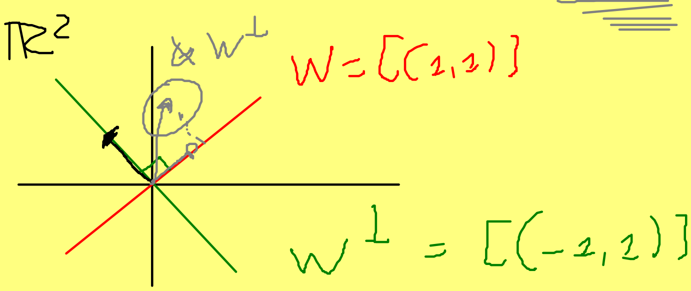
30/9

1) Dado $W \in V$ un subespacio, definimos

el complemento ortogonal como

$$W^{\perp} = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in W\}$$




$V = W \oplus W^{\perp}$ ( $\dim(V) < \infty$ )

---

Ej 1).

1º) Encontrar base $\mathcal{B}$ de $W$ ( observar $\dim_{\mathbb{C}^3}(W) = 1$ )

2º) Completar $\mathcal{B}$ para que sea base de $V$.

es decir, agregar 2 elementos L.I. con $v_1 \in \mathcal{B}$, ya que $\dim_{\mathbb{C}^3}(V) = 3$

3º) Aplicar G-S para obtener $\mathcal{C}$ base ortogonal de $V$.

4º) Normalizar cada vector de $\mathcal{C}$, para así obtener una base ortonormal de $V$.

5°) $\mathcal{C} = \left\{ \frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \frac{w_3}{\|w_3\|} \right\}$

Como $w_2 = v_2 \in W \Rightarrow \frac{w_2}{\|w_2\|} \in W$

Entonces $\left\{ \frac{w_2}{\|w_2\|}, \frac{w_3}{\|w_3\|} \right\}$ son una base de $W^\perp$.

por que,

Por G-S, $\left.\begin{array}{l} \langle w_2, w_1 \rangle = 0 \\ \langle w_3, w_1 \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow w_2, w_3 \in W^\perp$

$\langle w_2, w_3 \rangle = 0 \rightarrow \left\{ \frac{w_2}{\|w_2\|}, \frac{w_3}{\|w_3\|} \right\}$ L.I.

Como $\dim_{\mathbb{C}^3}(W^\perp) = 2$ y $\# \left\{ \frac{w_2}{\|w_2\|}, \frac{w_3}{\|w_3\|} \right\} = 2$

y es L.I. $\Rightarrow \left\{ \frac{w_2}{\|w_2\|}, \frac{w_3}{\|w_3\|} \right\}$ es base de $W^\perp$.

---

<u>Caso general</u>; $\dim(V) = n+m$

$\dim(W) = n, \quad \dim(W^\perp) = m$

1°) Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de $W$ $\quad \{v_1, \dots, v_n, \underbrace{v_{n+1}, \dots, v_{n+m}}_{\text{agregamos}}\}$

2°) Completar la base con $m$ vectores L.I.

3°) Aplicar G-S. y así obtener $\mathcal{C}$ base <u>ortogonal</u> de $V$.

4°) Normalizar cada $w_i \in \mathcal{C}$.

5°) Los primeros $n$ vectores de $\mathcal{C}$, son base ortonormal de $W$, y los restantes $m$ vectores de $\mathcal{C}$ forman una base ortonormal de $W^{\perp}$.

Recordar que si $V = W \oplus W^{\perp}$, entonces todo $v \in V$ lo podemos escribir como $v = w_1 + w_2$

donde $w_1 \in W$
$w_2 \in W^{\perp}$

$P_W(v) = w_1$ , $P_{W^{\perp}}(v) = w_2$

- La cuenta que hay que hacer.

$$(x,y,z) = v = \underbrace{\overline{\lambda_1} t_1}_{w_1} + \underbrace{\overline{\lambda_2} t_2 + \overline{\lambda_3} t_3}_{w_2} \quad , x,y,z \in \mathbb{C}$$

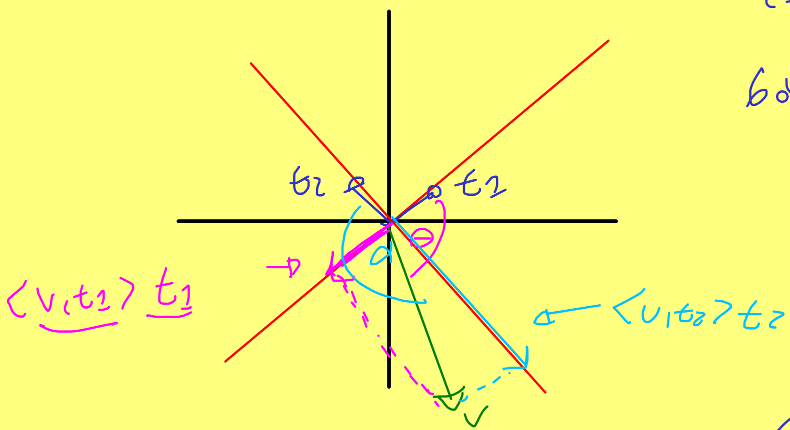
Rec... Si $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_n\}$ es una base ortonormal, entonces todo $v \in V$ es:

coef. de Fourier

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, w_i \rangle w_i$$

En el ejemplo:

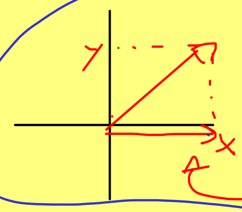
$$v = \overbrace{\langle v, t_1 \rangle}^{\lambda_1} t_1 + \overbrace{\langle v, t_2 \rangle}^{\lambda_2} t_2 + \overbrace{\langle v, t_3 \rangle}^{\lambda_3} t_3$$




$\beta = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$

base ortonormal de $\mathbb{R}^2$

$$v = \underbrace{\langle v, t_1\rangle}_{\|v\|\cos\theta} t_1 + \underbrace{\langle v, t_2\rangle}_{\|v\|\cos\theta} t_2$$



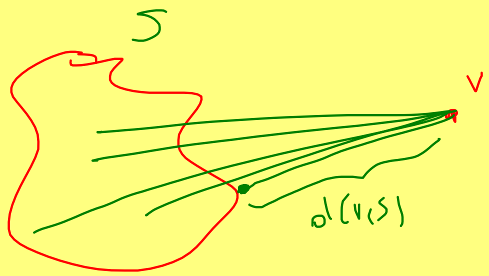

$\langle v, (1,0)\rangle \; (1,0)$

Obs: $\langle v, w\rangle = \|v\|\,\|w\|\cos\theta$

$\theta \quad \measuredangle(v,w) \rightarrow$ se define como el menor posible.

Def: $S \subset V$ no vacío, $v \in V$ entonces

$$d(v,S) = \inf \{ d(v,w) : w \in S \}$$




distancia entre dos vectores

Coro 2.2.22: $d(v,S) = d(v, P_S(v)) := \| v - P_S(v) \|$

---

Ej: $W = [(1, -\sqrt{2})] \to W = \{ (x, -\sqrt{2}x) : x \in \mathbb{R} \}$

$(0,0) \in W$

$W^\perp = \{ v \in V : \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W \}$

$\langle (y,z), (x, -\sqrt{2}x) \rangle = 0$

$\Downarrow$

$yx - \sqrt{2}zx = 0$

$x[y - \sqrt{2}z] = 0 \quad \to x = 0$

$\to y = \sqrt{2}z$

$W^\perp = \{ (\sqrt{2}z, z) : z \in \mathbb{R} \} = [(\sqrt{2}, 1)]$

Ej 3: $\mathbb{R}^2 = \{(1,0),(0,1)\} = [(1,1),(1,-1)]$

Queremos ver que $(W_1+W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$.

$\subseteq$ y $\supseteq$

($\subseteq$) Sea $v \in (\overbrace{W_1+W_2}^{t_1+t_2})^\perp$, es decir

$\langle v, t_1+t_2\rangle = 0$

$\hookrightarrow \langle v,t_1\rangle + \langle v,t_2\rangle = 0$

Lineal $\langle\ ,\ \rangle$

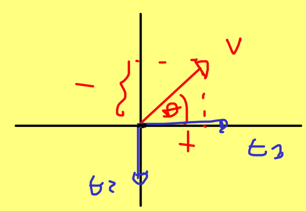
$t_1 \in W_1$
$t_2 \in W_2$

$\langle v,t_1\rangle = -\langle v,t_2\rangle$

Si $\langle v,t_1\rangle = \langle v,t_2\rangle = 0$ $(\forall t_1,t_2)$ y de esta?

$\langle v,t_1\rangle = -\langle v,t_2\rangle$

Esto es cierto $\forall t_1\in W_1$, $t_2\in W_2$




$\theta = 45$

En particular, tomando $\boxed{t_2=0} \to \langle v,t_1\rangle = 0 \quad \forall t_1\in W_1$

Entonces $v\in W_1^\perp$

Por otro lado, tomando $t_1=0 \to \langle v,t_2\rangle = 0 \quad \forall t_2\in W_2$

Entonces $v\in W_2^\perp$

$\Rightarrow v\in W_1^\perp \cap W_2^\perp$