2/10

5) $T \in \mathcal{L}(V)$ es una proyección ortogonal,

si es una proyección asociada a

la descomposición $V = W \oplus W^\perp$

Proyección sobre W. $\begin{cases} \cdot\ \underline{Im(T) = W} \\ \cdot\ Ker(T) = W^\perp \end{cases}$, $T^2 = T$

V de dimensión finita, $W \subset V$ no vacío

$T \in \mathcal{L}(V)$, $T|_W : W \to W \subset V$, $\underline{T|_W = Id}$

$W^\perp \subset Ker(T)$.

• $\underline{W^\perp \supset Ker(T)}$:

Por el teorema de los dimensiones

$$\underline{dim(V)} = dim(Im(T)) + dim(Ker(T))$$

Por otro lado, como $V = W \oplus W^\perp$, entonces

$$\underline{dim(V)} = dim(W) + dim(W^\perp)$$

Por lo tanto,

$$\dim(Im(T)) + \dim(Ker(T)) = \dim(W) + \dim(W^{\perp})$$

Como $T|_W = Id$, entonces $W \subset Im(T)$, por lo tanto $\dim(W) \leq \dim(Im(T))$

$$\dim(\cancel{Im}(T)) + \dim(Ker(T)) \leq \dim(\cancel{Im}(T)) + \dim(W^{\perp})$$

$$\dim(Ker(T)) \leq \dim(W^{\perp})$$

Por otro lado, $W^{\perp} \subset Ker(T) \Rightarrow \dim(Ker(T)) \geq \dim(W^{\perp})$

Entonces $\dim(Ker(T)) = \dim(W^{\perp})$

$\Rightarrow Ker(T) = W^{\perp}$

$Im(T) = W$:

Sabemos que

$\dim(Im(T)) = \dim(W)$,

y además $T|_W = Id$, entonce

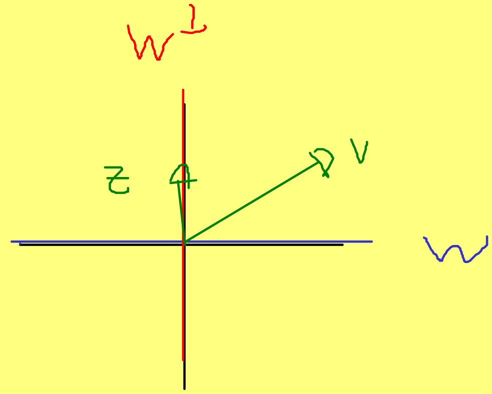
$\Rightarrow W \subset Im(T)$.

Por lo tanto $Im(T) = W$

Queda para probar que $T^2 = T$

---

7) $\dim(V) < \infty$, $W \subset V$, $v \in V \setminus W$, $\Big\}$ Queremos ver que $\exists\, z \in W^\perp$ tq $\langle z, v \rangle \neq 0$.



$\underline{W = \{0_V\}}$: $W^\perp = V$

$V \setminus W = V \setminus \{0_V\}$

Sea $v \neq 0_V$,

Tomamos $z = v \in W^\perp$,

$\langle v, v \rangle = \|v\|^2 > 0$

$\underline{W \neq \{0_V\}}$: Sea $\underline{v \in V \setminus W}$ $(v \neq 0_V)$.

¿$\exists\, z \in W^\perp$ tq $\langle z, v \rangle \neq 0$?

Sabemos $\underline{V = W \oplus W^\perp}$, $W^\perp = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in W\}$

$\Rightarrow v = w_1 + w_2 \quad \Big| \begin{array}{l} w_1 \in W \\ w_2 \in W^\perp \end{array}$

$$\langle v, w_2\rangle = \langle w_1 + w_2, w_2\rangle$$
$$= \underbrace{\langle w_1, w_2\rangle}_{\substack{=0 \\ w_1\in W \\ w_2\in W^\perp}} + \underbrace{\langle w_2, w_2\rangle}_{\|w_2\|^2 \geq 0}$$

A priori $\langle v, w_2\rangle \geq 0$, y $\langle v, w_2\rangle = 0$ si $w_2 = 0_V$

$v \in V \setminus W$

Pero si $w_2 = 0 \Rightarrow v = w_2 \in W$ ↯

Entonces $w_2 \neq 0$, por lo tanto $\langle v, w_2\rangle > 0$

---

7) $$\ell^2 = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\}$$

$x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots \ldots)$

Ej. $x = (1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots) \notin \ell^2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty$$

$x = (1, 0, 0, 0, \ldots \ldots, 0, 0, \ldots) \in \ell^2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 = \underset{1}{x_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = 1$$

a) Sean $(x_n), (y_n) \in \ell^2(\mathbb{R})$

$\hookrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < \infty$

$\sum_{n=0}^{\infty} y_n^2 < \infty$

$(x+y)_n := (x_n) + (y_n)$

$\hookrightarrow$ ¿$(x+y)_n \in \ell^2(\mathbb{R})$?

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x+y)_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n)^2 = \overbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2}^{<\infty} + \overbrace{\sum_{n=0}^{\infty} y_n^2}^{<\infty} + 2\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$$

Pensar como probar que es finito.

d) $x^{(i)} = \text{fijo } e_i$, $x^{(0)} = (1, 0, \dots, 0,)$

↑

Chanchado

$x^{(1)} = (0, 1, \dots, 0, \dots)$

$x^{(300)} = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$

lugar 301

$$W = \langle \{e^{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_i e^{(i)} : i \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ \lambda_i = 0 \text{ salvo una cantidad finitas de indices} \right\}$$

$= \{$combinaciones lineales finitas$\}$

Obs: $W \cancel{\subseteq} \ell^2(\mathbb{R})$, es sabido que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$

$(1, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots \ \text{—} \ \dots \}$