7/10

5.1)

$\alpha : V \to \mathbb{K}$ un funcional.

$\exists w \in V$ tq $\alpha(v) = \langle v, w \rangle$ $\forall v \in V$

Ej: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. $V = \mathbb{R}^2$

$\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. $\alpha(x,y) = x + y$

Queremos encontrar $w \in V$

tq $\alpha(x,y) = \langle v, w \rangle$

$\qquad \parallel$

$\quad x+y$

$w = (a, b) \Rightarrow \langle v, w \rangle = ax + by$

$\alpha(x,y) = x + y = \underbrace{a}_{1}x + \underbrace{b}_{1}y = \langle v, w \rangle$

Entonces $w = (1, 1)$

c) $V = \mathbb{R}_2[x]$

$\alpha(p) = p(0) + p'(1)$

$\alpha : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ $\qquad \alpha(p) = \langle p, f \rangle$

$\langle p, f \rangle = \int_0^1 p \cdot f$

$p(x) = ax^2 + bx + c \to p(0) = c$

$p'(1) = 2a + b$

$$\boxed{\alpha(p) = 2a + b + c}$$

$f(x) = Ax^2 + Bx + C$

$$\langle p, f \rangle = \int_0^1 (ax^2+bx+c)(Ax^2+Bx+C)\, dx =$$

$$= \int_0^1 aAx^4 + (aB + bA)x^3 + (aC + bB + cA)x^2 + (bC + cB)x + cC \, dx$$

$$= \frac{a\bar{A}}{5} + \frac{(a\bar{B} + b\bar{A})}{4} + \frac{(a\bar{C} + b\bar{B} + c\bar{A})}{3} + \frac{(b\bar{C} + c\bar{B})}{2} + cC.$$

$$= a\Big[\overbrace{\frac{A}{5} + \frac{B}{4} + \frac{C}{3}}^{2}\Big] + b\Big[\overbrace{\frac{A}{4} + \frac{B}{3} + \frac{C}{2}}^{1}\Big]$$

$$+ c\Big[\underbrace{\frac{A}{3} + \frac{B}{2} + C}_{1}\Big]$$

$= 2a + b + c$

Queremos

Hay que resolver, para hallar A, B, C.

$$\begin{cases} \frac{A}{5} + \frac{B}{4} + \frac{C}{3} = 2 \\ \frac{A}{4} + \frac{B}{3} + \frac{C}{2} = 1 \\ \frac{A}{3} + \frac{B}{2} + C = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C$$

---

d) $A, B \in M_n(\mathbb{R})$

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{ij}$$

$\underline{n=2}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \cdot b_{ij} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

$$= a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} + a_{21} b_{21} + a_{22} b_{22}$$

$$tr(A) = \langle A, B \rangle \quad \forall A \in M_n(\mathbb{R})$$

$\quad\; \| \; \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ $\qquad\qquad$ $B \in M_n(\mathbb{R})$ fija

Práctico 6

$T \in L(V)$ es autoadjunto si:

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle \quad \forall v, w \in V$$

Ej: $T = Id$, $\langle Id(v), w \rangle = \langle v, w \rangle = \langle v, Id(w) \rangle$

• $V = \mathbb{C}^2$, $T(x,y) = (x\bar{x}, y\bar{x}) = \bar{x}(x, y)$

$$\left.\begin{array}{l}(x,y) = v \\ (z,t) = w\end{array}\right\} \langle T(x,y), (z,t) \rangle = \langle \bar{x}(x,y), (z,t) \rangle$$

$$= \bar{x} \langle (x,y), (z,t) \rangle$$

$$= \bar{x} [x\bar{z} + y\bar{t}]$$

Por otro lado: $\langle (x,y), T(z,t) \rangle = \langle (x,y), \bar{z}(z,t) \rangle$

$$= z \langle (x,y), (z,t) \rangle$$

$$= z [x\bar{z} + y\bar{t}]$$

¿ $\bar{x}[x\bar{z} + y\bar{t}] = z[x\bar{z} + y\bar{t}]$?

$\forall v, w \in \mathbb{C}^2$

Claramente no, pues $\bar{x} \neq z$ casi siempre.

Prop: Si $T \in \mathcal{L}(V)$ es autoadjunta entonces es diagonalizable en una base ortonormal.

o

$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$

$\boxed{\chi_A(t) = -t^2+1}$ → No escinde en $\mathbb{R}$!

pero si en $\mathbb{C}$.

Pensamos a $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, en tal caso

$t_1 = i$, $t_2 = -i$

Prop: Si $T \in L(V)$ y $\mathcal{B}$ es una base ortonormal:

T es autoadjunto $\iff$ $(T)_{\mathcal{B}}$ es simétrica ($\mathbb{R}$)

es hermítica ($\mathbb{C}$)

$A = \overline{A}^t =: A^*$

Prop: Si $T \in L(V)$, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal, y $A = (a_{ij}) = [T]_{\mathcal{B}}$

entonces $a_{ij} = \langle T(v_i), v_j \rangle$

Obs: Si $T \in L(V)$ es auto adjunto, entonces $\exists$ $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ortonormal, donde $[T]_{\mathcal{B}}$ es diagonal

semejante

2) $T, S \in L(V)$ autoadjunto.

TS es autoadjunto $\Leftrightarrow$ $TS = ST$

($\Rightarrow$) $\langle T(S(v)), w\rangle = \langle v, TS(w)\rangle$

$\quad \| \leftarrow$ T autoadjunto.

$\langle S(v), T(w)\rangle$

$\quad \| \leftarrow$ S autoadjunto

$\langle v, ST(w)\rangle$

$\langle v, ST(w)\rangle = \langle v, TS(w)\rangle$ $\forall v, w \in V$

$\Rightarrow ST = TS$

($\Leftarrow$) $ST = TS \Rightarrow \langle v, ST(w)\rangle = \langle v, TS(w)\rangle$

S auto-adjunto $\rightarrow$ $\|$

$\langle S(v), T(w)\rangle$

T auto-adjunto $\rightarrow$ $\|$

$\langle TS(v), w\rangle$