9/10

3) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $T \in \mathcal{L}(V)$ autoadjunto

$$\langle T(v), v \rangle \overset{\text{Autoadjunto}}{=} \langle v, T(v) \rangle$$

$\shortparallel$ ← $\langle , \rangle$ producto interno.

$$\overline{\langle v, T(v) \rangle}$$

$$\langle v, T(v) \rangle = \overline{\langle v, T(v) \rangle} \quad \forall v \in V$$

$\Uparrow$

sii $\langle v, T(v) \rangle \in \mathbb{R}$

b) Queremos ver que $\| T(v) \pm i v \|^2 = \|T(v)\|^2 + \|v\|^2$

$$\| T(v) \pm i v \|^2 = \langle T(v) \pm i v, T(v) \pm i v \rangle$$

linealidad $\langle , \rangle$

$$= \underbrace{\langle T(v), T(v) \rangle}_{\|T(v)\|^2} + \langle T(v), \pm i v \rangle + \langle \pm i v, T(v) \rangle$$

$$+ \underbrace{\langle i v, i v \rangle}_{\underbrace{i \bar{i}}_{1} \langle v, v \rangle = \|v\|^2}$$

$$\langle T(v), \pm i v \rangle + \langle \pm i v, T(v) \rangle =$$

$$= \overline{\pm i} \langle T(v), v \rangle + \pm i \langle v, T(v) \rangle$$

$$= \mp i \langle T(v), v \rangle + \pm i \langle T(v), v \rangle = 0$$

Deducir que $T+i\,Id$, $T-i\,Id$ son operadores invertibles.

Veamos el $Ker(T \pm i\,Id)$:

Sea $v \in V$: $T \pm i\,Id\,(v) = 0_V$

$$\|T(v) \pm i v\|^2 = \|T(v)\|^2 + \|v\|^2 \quad \forall v \in V.$$

Para este v, $\|T(v) + i v\|^2 = 0$, es decir

$$\|T(v)\|^2 + \|v\|^2 = 0$$

$$\|T(v)\|^2 = -\|v\|^2 \quad \text{sii} \quad \|v\|^2 = 0$$

$$\text{sii} \quad v = 0_V$$

Entonce $Ker(T \pm i\,Id) = \{0_V\}$,

i.e. $T \pm i\,Id$ es inyectiva. Luego por el teorema de las dimensiones $T \pm i\,Id$ es biyectiva, y por lo tanto invertible.

$T \in \mathcal{L}(V)$: $T : V \to V$, $\dim(V)$:

$$\dim(V) = \dim(Ker(T)) + \dim(Im(T))$$

5)

a) $T \in L(V)$ positivo $\Rightarrow$ Autoadjunto

$\langle T(v), v \rangle > 0$

$(\Rightarrow)$ Sea v vec. prop. $\Rightarrow$

$$\langle T(v), v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \cdot \underbrace{\langle v, v \rangle}_{\|v\|^2 > 0} > 0$$

Entonces $\lambda > 0$.

$(\Leftarrow)$ Sea v vec. propio,

Solo vale para vectores propios.

$$0 < \lambda \|v\|^2 = \langle \lambda v, v \rangle = \langle T(v), v \rangle$$

Como T es autoadjunto, sabemos que T es diagonalizable en una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de vectores propios.

ortonormal

Luego todo $v \in V$, se escribe de forma única como $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. Si $v \neq 0_V$

$$\langle T(v), v\rangle = \left\langle T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right), \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \right\rangle$$

$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$

Los v_i son vectores propios.

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i v_i , \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \right\rangle$$

$\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$

$\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$

$\langle v_i, v_i\rangle$

Hipotesis

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\alpha_i \overline{\alpha_i}}_{\geq 0} \overline{\lambda_i} \langle v_i, v_i\rangle$$

$\lambda_i > 0$

$\|v_i\|^2 > 0$

Linealidad de $\langle \ , \ \rangle$

Los v_i son vectores propios.

$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, $v \neq 0_V$, es decir hay al menos un

$\alpha_i \neq 0 \Rightarrow \alpha_i \overline{\alpha_i} > 0$, entonces

$\langle T(v), v\rangle > 0 \quad \forall v \neq 0_V$.

b) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $L_A(v) = Av$

<u>$\mathbb{K} = \mathbb{C}$</u>

($\Rightarrow$) L_A es positivo $\to$ L_A es autoadjunto
$\to$ Todos los valores propios son positivos.

Como L_A es autoadjunto, entonces la matriz asociada a L_A es hermitiana (simétrica $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) para toda base. Luego en la base canónica

$[L_A]_{\mathcal{C}} = A$, entonces A es hermitiana. (simétrica $\mathbb{K}=\mathbb{R}$)

($\Leftarrow$) A es hermitiana y todos sus valores propios son positivos. Entonces para ver que L_A es positivo, alcanza con probar que sea autoadjunto.

A hermitiana implica L_A autoadjunto

Para usar este teorema, necesitamos que $A = [L_A]_{\mathcal{C}}$, tenga $\mathcal{C}$ base ortonormal.

$L_A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$: $L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.

$\mathcal{C} = \{ie_1, ie_2, \ldots, ie_n\}$. Observar que con $\langle\ ,\ \rangle_{usual}$ $\mathcal{C}$ es ortonormal.

6) $T \in \mathcal{L}(V)$

a) T autoadjunto e invertible.

Queremos que T^{-1} es autoadjunta.

T autoadjunto $\Rightarrow$ $\exists$ $\mathcal{B}$ base ortonormal tq

$A = [T]_{\mathcal{B}}$ es semejante a una matriz diagonal.

$[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{-1} = A^{-1}$

Habría que ver si A hermitiana implica A^{-1} hermitiana.

- - - - - - - - - - - -

Como T es invertible, es biyectivo, entonces $\exists\ \tilde{v} \in V$ tq $v = T(\tilde{v})$

$$\langle v, T^{-1}(w)\rangle \quad \langle T^{-1}(v), w\rangle = \langle T^{-1}(T(\tilde{v})), w\rangle = \langle \tilde{v}, w\rangle$$

$$\langle T(\tilde{v}), T^{-1}(w)\rangle \overset{T \text{ autoadjunto}}{=} \langle \tilde{v}, \underbrace{T(T^{-1}}_{Id}(w))\rangle = \langle \tilde{v}, w\rangle$$

Es decir $\langle v, T^{-1}(w)\rangle = \langle T^{-1}(v), w\rangle$