21/10

Teo: Dado $T \in L(V)$. $\exists!\ T^* \in L(V)$ tq

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle \quad \forall v, w \in V$$

El T^* se le dice operador adjunto.

$$\boxed{T^*(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, T(v_i) \rangle v_i \quad \text{Si } \{v_1, \dots, v_n\} \text{ es una base ortonormal.}}$$

Ej sin usar eso: $T(x,y) = (-y, 2x)$

Sean $v = (v_x, v_y)$, $w = (w_x, w_y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\langle T(v), w \rangle = \langle T(v_x, v_y), (w_x, w_y) \rangle = \langle (-v_y, 2v_x), (w_x, w_y) \rangle$$

$$= -v_y w_x + 2 v_x w_y$$

$$= \langle (v_x, v_y), T^*(w_x, w_y) \rangle$$

Queremos

$$\boxed{T^*(w_x, w_y) = (2w_y, -w_x)} \to \text{Adjunto.}$$

2.)

a) $T \in L(V)$ invertible

Sabemos $\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle \quad \forall v, w.$

Supongamos $\underline{T^* \text{ no inyectiva}}$, entonces $\exists\ w \neq 0_V$ tq $\underline{T^*(w) = 0}$. Luego $\langle T(v), w \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0 \quad \forall v \in V$

Como T es invertible, es sobre $\Rightarrow \exists\, v \in V$ tq $T(v) = w$.

$0 = \langle T(v), w \rangle = \langle w, w \rangle = \underbrace{\|w\|^2}_{w \neq 0}$ ↯

Entonces T^* inyectiva + teo. dim = Invertible.

otra forma:

$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle T \circ T^{-1}(v), w \rangle$

$= \langle T^{-1}(v), T^*(w) \rangle \qquad \forall v, w \in V$

$= \langle \underline{v}, \underbrace{(T^{-1})^* \circ T^*}_{Id}(\underline{w}) \rangle$

Como $(T^{-1})^* \circ T^* = Id$, entonces T^* es invertible

más aún $(T^{-1})^*$ es el inverso de T^*

$\Rightarrow (T^*)^{-1}$

$(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$

b) $(\operatorname{Im} T^*)^{\perp} = \ker T$

$(\supseteq)$ Sea $v \in \ker T$, $\Rightarrow T(v) = 0$

v fijo
$\forall w \in V$

$$0 = \langle 0, w \rangle = \langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle$$

$$\langle v, T^*(w) \rangle = 0, \quad v \perp T^*(w)$$

Al recorrer todos los $w \in V$ obtenemos $\operatorname{Im} T^*$,

entonces $\langle v, T^*(w) \rangle = 0 \quad \forall w$

$$v \in (\operatorname{Im} T^*)^{\perp}$$

$(\subseteq)$ Sea $v \in (\operatorname{Im} T^*)^{\perp}$, $\langle v, T^*(w) \rangle = 0 \quad \underline{\forall w} \in V$

$$0 = \langle v, T^*(w) \rangle = \langle T(v), w \rangle = 0$$

$\Rightarrow T(v) = 0$

$\Rightarrow T(v) \perp w$

1) $T(v) \perp w \quad \forall w \in V \Rightarrow T(v) = 0 \Rightarrow v \in \ker(T)$

2) Si $T(v) \neq 0_V$, entonces $\exists S$ subespacio que contiene a $T(v)$, entonces tomando w coolineal con $T(v)$

obtenemos $0 = \langle T(v), w \rangle$ ↯

$$\pm \|T(v)\| \, \|w\|$$

c) $T \circ T^*$ es semipositivo.

$\forall v \neq 0$

$\langle T \circ T^*(v), v \rangle \geq 0$

$> 0 \leftarrow$ si T es invertible.

$T \circ T^*$ autoadjunto

$$\boxed{(T^*)^* = T}$$

---

3. b)

$$\langle T(v), v \rangle = \overset{\text{def}}{=} \overline{\langle v, T(v) \rangle}$$

$$\langle T(v), v \rangle = \langle v, T(v) \rangle$$

Autoadjunto

$\left\} \overline{\langle v, T(v) \rangle} = \langle v, T(v) \rangle \quad \forall v \in V.\right.$

Def: $A \in M_n(\mathbb{K})$, A es normal si

$$A A^* = A^* A$$

Dada $A \in M_n(\mathbb{K})$, $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$v \mapsto A.v$

6.b) $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$

$$T(x,y) = (2x + iy,\ x + 2y)$$

$$\langle T(x,y), (x',y') \rangle = \langle (2x+iy,\ x+2y), (x',y') \rangle$$

$$= (2x+iy)\overline{x'} + (x+2y)\overline{y'}$$

$$\left.\begin{array}{l}(x,y) = (i,0) \\ (x',y') = (0,1)\end{array}\right\}$$

$$\to 2i \cdot 0 + (i)1 = i$$

$$\to i(-i) + 0 = -i^2 = 1$$

$$\langle (x,y), T(x',y') \rangle = \langle (x,y), (2x'+iy',\ x'+2y') \rangle$$

$$= x\overline{(2x'+iy')} + y\overline{(x'+2y')}$$

$$T^*(v) = \sum_{i=1}^{2} \langle T(v), v_i \rangle v_i$$

$v_1 = (i,0)$

$v_2 = (0,i)$

$v = (x,y)$

$$T^*(x,y) = \langle T(x,y), (i,0) \rangle (i,0) + \langle T(x,y), (0,i) \rangle (0,i)$$

$$= \langle (2x+iy,\ x+2y), (i,0) \rangle (i,0)$$

$$+ \langle (2x+iy,\ x+2y), (0,i) \rangle (0,i)$$

$$= (2x+iy)(-i)(i,0) + (x+2y)(-i)(0,i)$$

$$= (-2ix + y)(i, 0) - (ix + 2iy)(0, i)$$

$=$ - - -