28/10

$\langle \ , \ \rangle_{usual}$

$W = [(2,1,0,1),(0,1,-2,5)]$

$= \{ \underbrace{(2\lambda, \lambda+\alpha, -2\alpha, \lambda+5\alpha)}_{\to \lambda(2,1,0,1)+\alpha(0,1,-2,5)} : \lambda,\alpha \in \mathbb{K} \}$

(a,b,c,d), queremos ver cuanto tiene que valer a,b,c,d para $(a,b,c,d) \in W^\perp$

$\langle (a,b,c,d), \lambda(2,1,0,1)+\alpha(0,1,-2,5) \rangle =$

$= \lambda \langle \underbrace{(a,b,c,d),(2,1,0,1)}_{=0} \rangle + \alpha \langle \underbrace{(a,b,c,d),(0,1,-2,5)}_{=0} \rangle$

$\begin{cases} 2a+b+d=0 \\ b-2c+5d=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a = \frac{-b-d}{2} \\ c = \frac{5d+b}{2} \end{cases}$

Fijo $\underline{d,b}$:

Entonces $(a,b,c,d) \in W^\perp$ sii $a = \frac{-b-d}{2}$, $c = \frac{5d+b}{2}$, $b=b$, $d=d$

Si $b=0$, $d=1$ $\to \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{5}{2}, 1\right)$

$b=1$, $d=0$ $\to \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0\right)$

$\rightsquigarrow \mathcal{B} = \{(-1,0,5,2),(-1,2,1,0)\}$

7.23) $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

$T \in L(V)$ auto adjunto

$S := (T + i\,Id) \circ (T - i\,Id)^{-1}$

<u>Prop:</u> S es isometría sii $S^{-1} = S^*$

$$S^* = \left[(T+i\,Id)\circ(T-i\,Id)^{-1}\right]^*$$

$$= \left[(T-i\,Id)^{-1}\right]^* \circ (T+i\,Id)^*$$

$$= \Big[\underbrace{(T-i\,Id)^*}_{=(T+i\,Id)}\Big]^{-1} \circ \underbrace{(T+i\,Id)^*}_{=(T-i\,Id)}$$

$$\Rightarrow S^* = (T+i\,Id)^{-1}\circ(T-i\,Id)$$

$$S^{-1} = \left[(T+i\,Id)\circ(T-i\,Id)^{-1}\right]^{-1}$$

$\boxed{S^{-1} = S^*}$

Queremos

$$= \left[(T-i\,Id)^{-1}\right]^{-1} \circ (T+i\,Id)^{-1}$$

$$= (T-i\,Id)\circ(T+i\,Id)^{-1}$$

Ver si $(T-i\,Id)$, $(T+i\,Id)^{-1}$ conmutan

16) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$T \in \mathcal{L}(V)$ invertible

a) Queremos ver que existe S positivo tq $S^2 = T^* \circ T$

Por el ejercicio del parcial, alcanza con ver que $T^* \circ T$ es positivo.

$\Rightarrow$ $T^* \circ T$ autoadjunto

$\langle T^* \circ T(v), v \rangle > 0 \quad \forall v \neq 0_V$

$$\left.\begin{aligned} \langle T^* \circ T(v), w \rangle &= \langle T(v), (T^*)^*(w) \rangle \\ &\overset{\text{dimensión finita}}{=} \langle T(v), T(w) \rangle \\ &= \langle v, T^* \circ T(w) \rangle \end{aligned}\right\} \text{ } T^* \circ T \text{ es autoadjunto}$$

$\langle T^* \circ T(v), v \rangle = \langle T(v), T(v) \rangle = \|T(v)\|^2 > 0 \quad \forall v \neq 0_V$

Como T es invertible, es inyectiva $\Rightarrow$ $T(v) = 0$ sii $v = 0_V$

Entonces como $T^* \circ T$ es positivo, existe S positivo tq $S^2 = T^* \circ T$.

Como S es positivo, es invertible.

b) Sea $U = T \circ S^{-1}$.

Hay que ver que es unitario

Alcanza con probar que $U^* \circ U = Id$

$$U^* = (T \circ S^{-1})^* = (S^{-1})^* \circ T^*$$
$$= (S^*)^{-1} \circ T^*$$
S autoadjunto $\longrightarrow$ $$= (S)^{-1} \circ T^*$$

$$U^* \circ U = S^{-1} \circ \underbrace{T^* \circ T}_{S^2} \circ S^{-1}$$
$$= \underbrace{S^{-1} \circ S}_{Id} \circ \underbrace{S \circ S^{-1}}_{Id} = Id$$

c) Unicidad de U y S.

$\boxed{\begin{matrix} S' = S \\ U' = U \end{matrix}}$ $\longleftarrow$ Hay que probar

Supongamos que $T = U' \circ S'$

U' unitario, S' positivo

Sugerencia: En tal caso, $T^* \circ T = (S')^2$

$$S^2 = T^* \circ T = (S')^2 \leadsto S^2 = (S')^2$$
$$S \circ S = S' \circ S'$$

$$[S^2]_B = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = [S'^2]_B$$

$\shortparallel \qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$

$$[S]^2_\beta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = [S']^2_\beta$$

$$[S]_\beta [S]_\beta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \rightsquigarrow [S]_\beta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$$

$$\| $$

$$[S']_\beta [S']_\beta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \rightsquigarrow [S']_\beta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$$

Por lo tanto $S = S'$.

Recordar:

$$U' = T \circ (S')^{-1} = T \circ S^{-1} = U \rightsquigarrow U' = U$$

$\blacksquare$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es ortogonal si $A^{-1} = A^t$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es unitaria si $A^{-1} = A^*$

1.4) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

Hay que hallar $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tq $A^{-1} = A^t$