4/11 -

1) Sí $\alpha, \beta \in V^* = \{\alpha : V \to \mathbb{K} \text{ lineal}\}$ fijos

$$\varphi(u,v) = \alpha(u)\beta(v)$$

- $\varphi(au+w, v) = \alpha(au+w)\beta(v)$

$$= [a\alpha(u) + \alpha(w)]\beta(v)$$

$$= a\alpha(u)\beta(v) + \alpha(w)\beta(v)$$

$$= a\varphi(u,v) + \varphi(w,v)$$

- $\varphi(u, bv+w) = \alpha(u)\beta(bv+w)$

$$= \alpha(u)[b\beta(v) + \beta(w)]$$

$$= \alpha(u)b\beta(v) + \alpha(u)\beta(w)$$

$$= b\alpha(u)\beta(v) + \alpha(u)\beta(w)$$

En un cuerpo, el producto siempre es conmutativo.

Un anillo es $(A, +, \cdot, 0, 1)$

A es un conjunto:

$+, \cdot : A \times A \to A$

0 es el neutro de la suma

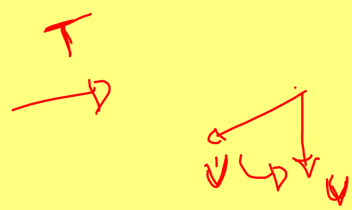
1 es el neutro del producto

Que verifica:

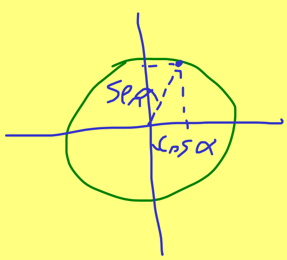
$+$: Conmutativa
Asociativa
$\exists$ inverso
distributiva

$\cdot$: Asociativa
distributiva

$a\,b = 0$ sin que a y b lo sean.



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) $\varphi(u,v) = \dfrac{\Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi(v)}{2}$ ← Ojo: Solo vale si car $\mathbb{K} \neq 2$

$$\varphi\big((\overset{x}{x},\overset{y}{y}),(\overset{x}{x'},\overset{y}{y'})\big) = \overset{ax^2}{a x x'} + \overset{+bxy}{\tfrac{b}{2} x y'} + \tfrac{b}{2} x' y + \overset{+cy^2}{c y y'}$$

$\Phi(x,y) = \varphi((x,y),(x,y))$, $\boxed{\Phi(x,y) = a x^2 + b x y + c y^2}$

$\to$ rad $\varphi = \{(x,y) \in \mathbb{K}^2 : \varphi((x,y),(x',y')) = 0 \ \ \forall (x',y') \in \mathbb{K}^2\}$

Fijado (x,y): $\varphi((x,y),(x',y')) = a\bar{x}x' + \frac{b}{2}\bar{x}y' + \frac{b}{2}x'\bar{y} + c\bar{y}y'$

$$= \underbrace{(x,y)\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}}_{=0}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0 \quad \forall \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

rad $\varphi = \left\{(x,y) : \begin{cases} ax + \frac{b}{2}y = 0 \\ \frac{b}{2}x + cy = 0 \end{cases}\right\}$

$\to \left(ax + \frac{b}{2}y \, , \, \frac{b}{2}x + cy\right) = (0,0)$

$$\boxed{\begin{cases} ax + \frac{b}{2}y = 0 \\ \frac{b}{2}x + cy = 0 \end{cases}} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\to$ det $= ac - \dfrac{b^2}{4} \neq 0$ $\quad \boxed{\begin{matrix} a \neq 0 \\ -4a \neq 0 \end{matrix}}$

$-4ac + b^2 \neq 0$

Def: Sean $\varphi: V \times V \to \mathbb{K}$ bilineal, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V, decimos que $\mathcal{B}$ es una base φ-ortogonal si $\varphi(v_i, v_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

7.1) $\varphi \in Bil_S(\mathbb{K}^2)$, $\Phi(x,y) = x^2 + 6xy + y^2$

$$\varphi((x,y),(x',y')) = xx' + 3xy' + 3x'y + yy'$$

$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^2) = 2 \rightsquigarrow$ Una base tiene dos elemento.

$$\{v_1, v_2\}$$

Obs: El 0 y el 1 siempre están en todo cuerpo

$v_1 = (1,0) \leftarrow$ Podemos fijar.

Ahora nos alcanza con encontrar $v_2 = (x',y')$ tq $\varphi((1,0),(x',y')) = 0$

$$\varphi((1,0),(x',y')) = x' + 3y' = 0 \rightsquigarrow \boxed{x' = -3y'}$$

Suponiendo que $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, $(\mathbb{Z} \subset \mathbb{K})$

Podemos tomar el vector $(-3,1)$.

$$\mathcal{B} = \{(1,0), (-3,1)\}$$

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(v_1,v_1) & \varphi(v_1,v_2) \\ \varphi(v_2,v_1) & \varphi(v_2,v_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$