28/8:

3) $Im(T) = \{-b + bx - bx^2 : b \in \mathbb{R}\}$

$Im(S) = \{\overbrace{a+b}^{\tilde{a}} + \overbrace{(b+c)}^{\tilde{c}} x^2 : a,b,c \in \mathbb{R}\}$

Base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ es $\{1, x, x^2\}$

$-b + bx - bx^2 = b(-1 + x - x^2) \Rightarrow B_1 = \{-1 + x - x^2\}$

$a+b + (b+c)x^2 = \overbrace{(a+b)}^{\tilde{a}} \cdot \underbrace{1} + \overbrace{(b+c)}^{\tilde{b}} \underbrace{x^2} \Rightarrow B_2 = \{1, x^2\}$

Obs: $T: V \to W$ lineal, B es base de V [V, W finitos],

es cierto que $\{T(B)\}$ genera $Im(T)$,

el problema puede ser que $\{T(B)\}$ no sea L.I.,

en ese sacamos 1 vector L.D, y nos

fijamos si queda L.I.

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(1,0,0) = (1,1,1)$

$T(0,1,0) = (2,2,2)$

$T(0,0,1) = (-3,-3,-3)$

$\{T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1)\}$ genera la imagen, pero no es

L.I. . Nos fijamos cual es L.D.

$\lambda_1(1,1,1) + \lambda_2 \underbrace{(2,2,2)} + \lambda_3(-3,-3,-3) = 0 \Rightarrow$ Ej: $\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = -1$

$\lambda_3 = 0$

$$\boxed{\dim(U+V) = \dim(V) + \dim(U) - \dim(U \cap V)}$$

4)

a) $V = U \oplus W$, $P_U: V \to V$ → $Im(P_U) = U$, $Ker(P_U) = W$ } Proyección sobre U en la dirección de W

$P_W: V \to V$ → $Im(P_W) = W$, $Ker(P_W) = U$

proyecciones $P_U^2 = P_U$

$P_U \circ P_W(v) = 0$

Sea $v \in V$, $v = u + w$, $u \in U, w \in W$ $\quad |P_W \circ P_U(v) = 0$

$P_U(v) = P_U(u) + \overset{0}{\overline{P_U(w)}} = P_U(u) \in U$

$P_W \circ P_U(v) = P_W(\underset{U}{P_U(u)}) = 0$ porque $Ker(P_W) = U$, $P_U(u) \in U$

Queremos ver que $P_U + P_W = Id$

Sea $v \in V \Rightarrow v = u + w$.

$P_U(v) = P_U(u) + P_U(w) \underset{w \in ker(P_U)}{=} P_U(u) \in U$

$P_W(v) = P_W(u) + P_W(w) \underset{u \in Ker(P_W)}{=} P_W(w) \in W$

} $P_U + P_W(v) = P_U(u) + P_W(w)$

$$\overbrace{P_U + P_W(v) = P_U(u) + P_W(w)}^{\text{Sabemos}} = \overbrace{v = Id(v)}^{\text{Queremos}}$$

Obs: El u y w son únicos pues $V = U \oplus W$.

Sea $u \in U \Leftrightarrow \exists\ v \in V$ tal que $P_U(v) = u$ $\left(Im(P_U) = U \right)$

Luego $P_U(u) = P_U(P_U(v)) = P_U^2(v) \underset{\uparrow}{=} P_U(v) = u$

P_U proyección

$\Rightarrow P_U(u) = u.$

De la misma forma $P_W(w) = w$

$V = u + w$ y u y w son únicos $(V = U \oplus W)$

$$P_U + P_W(v) \underset{\substack{\uparrow \\ def}}{=} P_U(v) + P_W(v) \overset{v = u+w}{=} P_U(u+w) + P_W(u+w)$$

Lineal, parte anterior

$$= P_U(u) + \underbrace{\cancel{P_U(w)}}_{0} + \underbrace{\cancel{P_W(u)}}_{0} + P_W(w)$$

$$= P_U(u) + P_W(w) = u + w = v$$

Entonces $P_U + P_W = Id$