6/11

$\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$

$\mathrm{rad}(\varphi) = \{ \underline{v} \in V : \varphi(v,w) = 0 \ \ \forall w \in V \}$

Si v está fijo, $\varphi(v,\cdot) : V \to \mathbb{K}$ una transformación lineal

$v \in \mathrm{rad}(\varphi) \iff \varphi(v,\cdot)$ es la transformación lineal nula

$\varphi \in \mathrm{Bil}_S(V)$, $\quad M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} = A$

Si v está fijo, $\varphi(v,\cdot) : V \to \mathbb{K}$
$$w \longmapsto (v^t A)\, w$$

$(v^t A)\, w = 0 \quad \forall w \quad$ sii $\quad v^t A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

sii $\quad Av = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

sii $\quad v \in \underset{\substack{\shortparallel \\ \mathrm{Ker}(A)}}{\mathrm{Ker}(L_A)}$

$\varphi(X,Y) = \mathrm{tr}(X \cdot Y) \qquad X, Y \in M_n(\mathbb{K})$

$\mathrm{rad}(\varphi) = \{ X \in M_n(\mathbb{K}) : \mathrm{tr}(XY) = 0 \ \forall Y \in M_n(\mathbb{K}) \}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}}_{Y} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

$\mathrm{tr}(XY) = ae + bg + cf + dh = 0 \quad \forall e, g, f, h$

$aa + b0 + c0 + d0 = 0 \to a^2 = 0$ sii $\boxed{a = 0}$

$e = a,\ g = f = h = 0 \longrightarrow a^2 = 0 \quad \boxed{a = 0}$

$g = b,\ e = f = h = 0 \longrightarrow b^2 = 0 \quad \boxed{b = 0}$

$f = c,\ e = g = h = 0 \longrightarrow c^2 = 0 \quad \boxed{c = 0}$

$h = d,\ e = g = f = 0 \longrightarrow d^2 = 0 \quad \boxed{d = 0}$

$$\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rad}(\varphi)$$

Diagonalizar la forma

Dada $\varphi \in \operatorname{Bils}(V)$.

1º) Hallar $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = A$ en cualquier

2º) Como sabemos que existe $\mathcal{D}$ base φ-ortogonal, tiene sentido buscar la matriz cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{D}$

<u>Idea</u>: Queremos transformar A en una matriz diagonal, solo haciendo operaciones elementales:

- Intercambiar filas/columnas
- Multiplicar una fila/columna por una constante no nula
- Sumar un multiplo de una fila/columna

a otra.

Importante: Toda operación que se hace en las filas, se repite con la columnas. (o al reves)

$$\overbrace{E_n^t \cdots E_2^t E_1^t}^{Q^t} A \overbrace{E_1 E_2 \cdots E_n}^{Q} = D$$

fila columna

matriz cambio de base de B en D

$$\boxed{\begin{array}{l} Q^t A Q = D \\ A = (Q^t)^{-1} D Q^{-1} \end{array}}$$

$\leftarrow$ φ-ortogonal

Las columnas de $(Q^t)^{-1}$ forman la base φ-ortogonal

Algoritmo.

OF – operación en fila
OC = " en columnas

A	Id	
A_1	Id_1	OC_1
A_2	Id_1	OF_1
⋮		

$$\left.\begin{array}{l} A_n \\ A_{n+1} \\ \underbrace{A_{n+2}}_{D} \end{array}\right| \begin{array}{l} Id_\ell \\ Id_{\ell+1} \\ \underbrace{Id_{\ell+2}}_{Q} \end{array} \quad \begin{array}{l} OC_{\ell+1} \\ OF_{\ell+1} \\ \end{array}$$

$\rightsquigarrow \quad Q^t A Q = D$

Ej: $\underline{7.6}$ $A = M_\varphi(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c|c}
A & Id \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \| \\
\checkmark \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
 & \| \\
\checkmark \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -1/4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1/4 & 1 \\ -1/2 & 2 \end{pmatrix} \\
\checkmark \underbrace{\begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{D} & \underbrace{\begin{pmatrix} 1/4 & 1 \\ -1/2 & 2 \end{pmatrix}}_{W} = {}_{\varphi}(Id)_{\mathcal{B}}
\end{array}$$

$C_2 + C_1 \rightsquigarrow C_1$

$F_2 + F_1 \rightsquigarrow F_1$

$C_2 + C_1 \rightsquigarrow C_2$

$F_2 + F_1 \rightsquigarrow F_2$

$C_1 - \frac{3}{4} C_2 \longrightarrow C_1$

$F_1 - \frac{3}{4} F_2 \longrightarrow F_1$

se cumple: $W^t A W = D$

Importante: Las columnas de W forman una base $\mathcal{C}$-ortogonal

---

$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ $\quad T: V \to V$

$\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_n\}$

$${}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{C}} = \left(\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(w_1) \Big| \cdots \Big| \mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(w_n) \right)$$

$\to$ Cambio de base

$$(T)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{C}} \, (T)_{\mathcal{C}} \, {}_{\mathcal{C}}(Id)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{C}}^{-1}$$