11/11 $\quad \varphi : V \times V \to \mathbb{K}$

1.b) $\varphi((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = (x_1 - y_1)^2 + x_2 y_2$

- $\varphi(a(x_1,x_2) + (z_1,z_2),(y_1,y_2)) = a\,\varphi((x_1,x_2),(y_1,y_2)) + \varphi((z_1,z_2),(y_1,y_2))$
- $\varphi((x_1,x_2), b(z_1,z_2) + (y_1,y_2)) = b\,\varphi((x_1,x_2),(z_1,z_2)) + \varphi((x_1,x_2),(y_1,y_2))$

$$\varphi(a(x_1,x_2) + (z_1,z_2),(y_1,y_2)) =$$

$$= \varphi((\underbrace{ax_1+z_1}_{\tilde{x}_1}, \underbrace{ax_2+z_2}_{\tilde{x}_2}),(y_1,y_2)) =$$

$$= (ax_1+z_1 - y_1)^2 + (ax_2+z_2)y_2$$

$a\,\varphi((x_1,x_2),(y_1,y_2))$

$$= a^2x_1^2 + z_1^2 + y_1^2 + 2ax_1z_1 - 2ax_1y_1 - 2z_1y_1 + ax_2y_2 + z_2y_2$$

$$a\,\varphi((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = (x_1-y_1)^2 + x_2y_2 = a x_1^2 + a y_1^2 - a2x_1y_1 + a x_2y_2$$

$$\varphi((z_1,z_2),(y_1,y_2)) = z_1^2 + y_1^2 - 2z_1y_1 + z_2y_2$$

No es bilineal

---

8) $$\varphi(X,Y) = \frac{\Phi(X+Y) - \Phi(X) - \Phi(Y)}{2}$$

$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

9)

Recordar: Dada $\varphi \in Bils(V)$ donde $V = \mathbb{R}^n$,

Una φ-descomposición es:

rad(φ)

$$V = V_0 \oplus V_+ \oplus V_-$$

$\Phi(v) = 0$

$\Phi\big|_{V_+}$ es definida positiva $\quad \Phi(v) > 0$

$\Phi\big|_{V_-}$ " " negativa $\quad \Phi(v) < 0$

• **Obs:** 1) No hay unicidad en V_+ y V_-

2) Sí hay unicidad en $\dim(V_+)$ y $\dim(V_-)$

Def:
- índice de φ es $\dim(V_+)$
- signatura de φ es $\dim(V_+) - \dim(V_-)$
- rango de φ es el rango de $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ [para cualquier base]

Obs: Si $\mathcal{B}$ es una base φ-ortogonal, sabemos

que $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & O & \\ & & a_r & & & & & \\ & & & a_{r+1} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & O & & & & a_s & & \\ & & & & & & a_{s+1} & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & a_n \end{pmatrix}$$

$\#\ a_i > 0$ es $\dim(V_+)$ $\Big\}$ La suma da el rango

$\#\ a_i < 0$ es $\dim(V_-)$

$\#\ a_i = 0$ es $\dim(V_0)$

9)

a) $\Phi:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi(x,y) = 2xy \rightsquigarrow \varphi((x,y),(x',y')) = xy' + x'y$

Sea $\mathcal{C} = \{(1,0),(0,1)\}$ canónica $\rightsquigarrow M_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Aplicamos el algoritmo de diagonalización:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right. \qquad C_1 + C_2 \to C_2$$

$$\checkmark \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right. \qquad F_2 + F_1 \to F_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \right. \qquad C_2 - \tfrac{1}{2} C_1 \to C_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \right. \qquad F_2 - \tfrac{1}{2} F_1 \to F_2$$

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$

Sea $\mathcal{B} = \{(1,1), (-1/2, 1/2)\}$ es base φ-ortogonal

$\langle (1,1), (-1/2, 1/2) \rangle = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \to$ ortogonal para $\langle \, , \rangle$

$\|(1,1)\| = \sqrt{2} = a$

$\|(-1/2, 1/2)\| = \frac{1}{\sqrt{2}} = b$,

$$\boxed{\mathcal{B} = \left\{ \frac{(1,1)}{a}, \frac{(-1/2, 1/2)}{b} \right\}}$$

es ortonormal para $\langle \, , \rangle$

$\varphi\left(\frac{(1,1)}{a}, \frac{(-1/2, 1/2)}{b} \right) = \frac{1}{a \cdot b} \varphi((1,1), (-1/2, 1/2)) = 0$

sigue siendo φ-ortogonal.

$\mathcal{B} = \left\{ \dfrac{(1,1)}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\,(-1/2, 1/2) \right\}$ ⟶ base ortonormal y φ-ortogonal

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(v_1,v_1) & \overset{0}{\varphi(v_1,v_2)} \\ \underset{0}{\varphi(v_2,v_1)} & \varphi(v_2,v_2) \end{pmatrix}$$

$\varphi(v_1,v_1) = 1$

$\varphi(v_2,v_2) = -1$ ⟶ $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\dim(V_+) = 1$

$\dim(V_-) = 1$

$\dim(V_0) = 0$

Indice de φ es 1, y rango de φ es 2

signatura de φ es 0

Obs: para hallar $\mathcal{B}$ es mejor:

1) Encontrar $\mathcal{D}$ base ortonormal

2) Hallar Q, D tq $M_{\mathcal{D}}(\varphi) = Q^{-1} D Q$ (D: val. prop., Q: vec. prop.)

3) Q^{-1} es unitaria, $\left. Q^* = Q^{-1} \right\}$ $Q^{-1} = Q^t$

$Q^* = \overline{Q}^t = Q^t$ ← Siempre estamos en $\varphi \in Bil_S(V)$ con $V = \mathbb{R}^n$

$M_{\mathcal{D}}(\varphi) = Q^t D Q$

La base ($\mathcal{B}$) formada por las columnas, hace que $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ sea

$Q\, M_{\mathcal{B}}(\varphi)\, Q^t = D$ • las filas de Q

---

ii)
b)

1) $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ φ-ortogonal

Queremos ver que $\Phi(e_i) \neq 0 \quad \forall i=1, \dots, n$

Como φ es <u>no-degenerada</u> $\Rightarrow$ $\text{rango}_0 = n$

$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) = \text{diag}(\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_n))$

Recordar $\text{rango}_0(\varphi) = \# \{ a_i : a_i \neq 0 \} = n$

Entonces $\Phi(e_i) \neq 0 \quad \forall i=1, \dots, n$

b) $v \in V \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$

$\Rightarrow$ Hay que ver como son los a_i

$\varphi(v, e_j) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i, e_j\right)$

$= \sum_{i=1}^{n} a_i\, \varphi(e_i, e_j)$ $\rightarrow \begin{cases} \Phi(e_j) & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

$= a_j\, \Phi(e_j)$

$\Rightarrow \boxed{a_j = \dfrac{\varphi(v, e_j)}{\Phi(e_j)}}$