18/11

Práctico 8.

1 a) $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ simétricas

B invertible, con todos los valores propios del mismo signo

Probar que $\exists Q \in M_n(\mathbb{R})$ tq Q^tAQ, Q^tBQ son diagonales.

- Valores propios de B son todos positivos.

$\langle u, v\rangle = u^t B v$

- $\langle u+w, v\rangle = (u+w)^t B v = (u^t + w^t) B v = u^t B v + w^t B v = \langle u, v\rangle + \langle w, v\rangle$
- $\langle u, v\rangle = u^t B v = (u^t B v)^t = v^t B^t (u^t)^t = v^t B u = \langle v, u\rangle$

$u^t B v \in \mathbb{K}$ $\quad$ B simétrica

- $\langle a u, v\rangle = (a u)^t B v = u^t a^t B v = u^t a B v = a\, u^t B v = a \langle u, v\rangle$

$a \in \mathbb{K}$

Los escalares siempre conmutan

- Si $u = 0 \Rightarrow \langle u, u\rangle = 0^t B 0 = 0$
- Si $\underline{u \neq 0}$, $\Phi(u) = \langle u, u\rangle = u^t B u > 0$ lo podemos ver

como una forma bilineal, $\varphi(u, v) = u^t B v$

$\to B = M(\varphi)$

$\to$ Alguna base ortonormal

B diagonalizable implica que existe $P \in M_n(\mathbb{R})$ tq

$B = P^{-1}DP$ con D diagonal, sea $\mathcal{B}$ la base formada

por las columnas de P $\Rightarrow$ $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = D = diag(\overline{\Phi(b_1)}, \dots, \overline{\Phi(b_t)})$

Como los valores propios de B son todos positivos,

entonces $\Phi(b_i) > 0 \quad \forall i$

Diagonales

$PBP^{-1} = D$ como $B = P^{-1}DP$

$A = R^{-1}ER$

$Q^tBQ = D = diag(\underset{\underset{\langle b_1, b_1 \rangle}{\shortparallel}}{\overset{\overset{1}{\shortparallel}}{\Phi}}(b_1), \dots, \overset{\overset{1}{\shortparallel}}{\Phi}(b_t)) = I$

$Q^t BQ = I$ si vamos

Q con columnas una base ortonormal para el p.i. y φ ortogonal

---

Practico 9

Def: $T \in L(V)$, $v \in V$ fijo, definimos el subespacio

T-cíclico generado por v como:

$$S_{v,T} = [v, T(v), T^2(v), \dots] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i T^i(v) : a_i \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\boxed{T^0 = Id}$

Prop:

$\dim(S_{v,T}) = h \Rightarrow S_{v,T} = [v, T(v), \dots, T^{h-1}(v)]$

2-a) $V = \mathbb{R}_3[x]$

$T(p) = p''$

$v = x^3$

$v = x^3$ }
$T(v) = 6x$ }

$T^2(v) = 0$

$T^3(v) = 0$

$T^2(x^3) = T \circ T(x^3)$
$= T(6x) = 0$

$S_{v,T} = [x^3, 6x]$

Una base es $\{6x, x^3\}$.

2b) $T(x) = x^t$:

n	$T^n(x)$
0	x
1	x^t
2	x
3	x^t
4	x
5	x^t

Si $T(v) = \lambda v \Rightarrow S_{v,T} = [v]$

$T^2(v) = T[T(v)] = T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda^2 v$

$\vdots$

$T^n(v) = \lambda^n v \in S_{v,T}$, $\left.\begin{array}{l}\lambda^n \in \mathbb{K} \\ v \in \{v\}\end{array}\right\} \lambda^n v \in [v]$

---

c) $V = M_2(\mathbb{R})$, $T(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X$ y $v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$+ - + - + \cdots -$ $\quad -t\det(B) + (-1)^{n-2} a_0$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} \cancel{0}\,t & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & \cancel{0}\,t & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \cancel{0}\,t & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} - t \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{k})$$

$\det = 1$

$\Rightarrow B \in M_{n-1}(\mathbb{K})$

donde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ son escalares arbitrarios. Probar

$$\chi_A(t) = (-1)^n \left(t^n - a_{n-1} t^{n-1} - \dots - a_1 t - a_0\right).$$

Sugerencia: probarlo por inducción en n, desarrollando $\det(A - tI)$ por la primera fila.

3. a)

Teo Cayley - Hamilton: $\cdot\ \chi_A(A) = 0$

$\cdot\ \chi_T(T) = 0$

Recordar: Si $p(t) = a_0 \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow p(A) = a_0 I$ "$I = A^0$"