20/11

10) $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tq: • B es invertible

• Todos los v.p. de B tienen mismo signo

1) Si los v.p. son positivos, $\boxed{\langle u, v\rangle = u^t B v}$ → P.I. → forma bilineal

Sea $\mathcal{E}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $M_{\mathcal{E}}(\langle , \rangle) = B$

Sea $\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$, $\underline{\varphi(u,v) = u^t A v} \Rightarrow M_{\mathcal{E}}(\varphi) = A$

Como $\langle , \rangle$ es un P.I. en $\mathbb{R}^n$ y
$\langle u,v\rangle = u^t B v$

Como $\underline{A \text{ es simétrica}} \Rightarrow \varphi \in Bil_s(\mathbb{R}^n)$
↳ $\varphi(u,v) = u^t A v$

Por el teo 4.5.13, sabemos que existe una base $\mathcal{B}$ $\underline{\text{b.o.n. para } \langle , \rangle}$ y $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ es diagonal. $[M_{\mathcal{B}}(\varphi) = D]$

Como $\mathcal{B}$ b.o.n para $\langle , \rangle$, $\overbrace{M_{\mathcal{B}}(\langle , \rangle)}^{\text{pienso a } \langle , \rangle \text{ como en } Bil_s} = Id$

$$M_{\mathcal{B}}(\langle , \rangle) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\langle b_1, b_1\rangle} & \frac{0}{\langle b_1, b_2\rangle} & \cdots & \frac{0}{\langle b_1, b_n\rangle} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{0}{\langle b_n, b_1\rangle} & \cdots & & \frac{1}{\langle b_n, b_n\rangle} \end{pmatrix} = Id$$

Tenemos:

$$M_{\mathcal{C}}(\langle\,,\,\rangle) = B \qquad M_{\mathcal{B}}(\langle\,,\,\rangle) = Id$$

$$M_{\mathcal{C}}(\varphi) = A \qquad M_{\mathcal{B}}(\varphi) = D \quad \text{(diagonal)}$$

- $$D = M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \overbrace{\left([Id]_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}\right)^t}^{Q^t}\ \overbrace{M_{\mathcal{C}}(\varphi)}^{A}\ \overbrace{[Id]_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}}^{Q}$$

- $$Id = M_{\mathcal{B}}(\langle\,,\,\rangle) = \left([Id]_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}\right)^t\ \overbrace{M_{\mathcal{C}}(\langle\,,\,\rangle)}^{B}\ [Id]_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}$$

$$D = Q^t A Q$$

$$Id = Q^t B Q$$

2) Los v.p. son negativos $\lambda_i < 0$: en lugar de usar B, usamos $-B$, los v.p son $-\lambda_i > 0 \ \forall i$.

$$\langle u, v\rangle = u^t(-B)v = -u^t B v$$

Idem que arriba pero con $-B$., con esto llegamos a:

$$D = Q^t A Q$$

$$Id = Q^t(-B)Q$$

$\hookrightarrow Id = -Q^t B Q$

$-Id = Q^t B Q$ ← Es lo que queremos.

$\hookrightarrow$ Es diagonal

Práctico 9

3. b) De 3. a) sabemos que

$$A^{-1} = \frac{1}{a_0}\left[(-1)^n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I\right]$$

Sug: A, B ([illegible]), $\Rightarrow$ AB ([illegible]), por inducción podemos probar que vale para cualquier cantidad, en particular si A ([illegible]), A^K también lo es. $K \in \mathbb{N}$

Def: Dada $A \in M_n(\mathbb{K})$, el polinomio minimal de A es el polinomio $m_A(t) \in \mathbb{K}[t]$, tal que:

i) $m_A(A) = 0$

ii) $gr(m_A(t)) = \min\{p \in \mathbb{K}[t] : p(A) = 0\}$

iii) $m_A(t)$ es mónico $\rightsquigarrow$ coeficiente principal vale 1

OBS: 1) Es único.

2) para operadores es igual.

Prop (5.3.11): $T \in L(V)$, β es una base de V

$\Rightarrow$ $m_T(t) = m_A(t)$, $A = [T]_\beta$

Teo (5.3.14): Las raíces de $m_T(t)$ y $\chi_T(t)$ son las mismas.

Obs: Si χ_T escinde, $\chi_T = (t-\alpha_1)^{n_1} \cdots (t-\alpha_\ell)^{n_\ell}$,

por lo tanto $m_T = (t-\alpha_1)^{k_1} \cdots (t-\alpha_\ell)^{k_\ell}$,

en donde $1 \leq k_i \leq n_i$

---

4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\chi_A(t) = (2-t)^2 - 1$
$= t^2 - 4t + 3$

$\chi_A(t)$ es candidato a $m_A(t)$, pues es mónico y $\chi_A(A) = 0$ (Cayley-Hamilton), lo que puede pasar es que $gr(m_A(t)) < gr(\chi_A(t))$.

Para ver si pasa o no, alcanza con calcular las raíces de χ_A. • Si son distintas ya está [Teo 5.3.14]

• Si la raíz es doble t_1, entonces

$\chi_A = (t-t_1)^2$, hay que ver que pasa con $(t-t_1)$: • Si $A - t_1 I = 0$

$\Rightarrow t - t_1 = m_A(t)$

• Si $A - t_2 I \neq 0$,

$\Rightarrow m_A(t) = \chi_A(t)$

$\chi_A(t) = t^2 - 4t + 3$; $t = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2}$

$\rightarrow t_1 = 3$

$\rightarrow t_2 = 1$

Entonces $\chi_A(t) = (t-3)(t-1) = m_A(t)$.