25/11

# Resumen:

Sea $p(t) \in \mathbb{K}[x]$, $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 t^0$ "$T^0 = I$"

Si $T \in L(V)$, $p(T) = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \dots + a_1 T + a_0 I$

donde $T^n = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{n \text{ veces}}$

Operador identidad

$p(T)(v) = a_n T^n(v) + \dots + a_1 T(v) + a_0 v$

$\to p(T) : V \to V$, es decir un operador

Ej: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (x+y, x-3y)$

$p(t) = t^2 - 1$

- $P(T) = T \circ T - 1 \cdot I$

$T^2(x,y) = T \circ T(x,y) = T(x+y, x-3y)$

$= (2x-2y, x+y - 3(x-3y))$

$= (2x-2y, -2x+10y)$

$P(T) = T^2 - 1I$, podemos llamarle $W = P(T)$

$W(x,y) = (2x-2y, -2x+10y) - (x,y)$ $-1 \cdot I(x,y)$

$= (x-2y, -2x+9y)$

**Obs:** Si $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ y $T \in L(V)$, entonces $p(T) \in L(V)$

$\chi_T(t) \in \mathbb{K}[t]$

Cayley-Hamilton: Si $T \in L(V) \Rightarrow \chi_T(T) = 0$

Polinomio característico

operador "cero"

**Def:** $m_T(t) \in \mathbb{K}[t]$ es el polinomio minimal de $T \in L(V)$ si:

1) • $m_T(T) = 0$

2) • $gr(m_T(t)) = \min\{p(t) \in \mathbb{K}[t] : p(T) = 0\}$

"El grado de $m_T(t)$ es el mínimo entre todos los polinomios que anulan al operador".

3) • $m_T(t)$ es mónico, el coeficiente líder vale 1.

**Obs:** Lo "difícil" es 1) y 2), ya que si

$p(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$ cumple 1) y 2)

entonces $\frac{p(t)}{a_n} = t^n + \dots + \frac{a_1}{a_n} t + \frac{a_0}{a_n}$ sigue cumpliendo 1) y 2)

y además es mónico.

Teo 5.3.14: Si $T \in \mathcal{L}(V)$, entonces $\chi_T(t)$ y $m_T(t)$ tienen las mismas raíces.

La idea es usar: 1) El teo

2) $gr(\chi_T(t)) < \infty$

• Si $\chi_T(t)$ escinde, lo podemos escribir así:

$$\chi_T(t) = (t - r_1)^{m_1} \cdots\cdots (t - r_\ell)^{m_\ell}$$

donde $r_1, \dots, r_\ell$ son las raíces y $m_1, \dots, m_\ell$ son las multiplicidades.

Ej: • $x^2 - 2 = 0$ las raíces son $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$, entonces

$$x^2 - 2 = (x - \underbrace{\sqrt{2}}_{r_1})(x - (\underbrace{-\sqrt{2}}_{r_2}))$$

• $x^2 + 1 = 0$, las raíces $i$ e $-i$, entonces Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$x^2 - 1 = (x - i)(\underbrace{x + i}_{x - (-i)})$$

En ese caso $m_T(t) = (t - r_1)^{K_1} \cdots\cdots (t - r_\ell)^{K_\ell}$ donde

$1 \leq K_i \leq m_i$

Ej:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(t) = (t-2)^3 (t-3)$$

Nos dice cuales exponentes podemos variar

- $m_A$ divide $\chi_A$
- $m_A$ es mónico
- $m_A$ y $\chi_A$ tienen mismas raíces

Candidatos a minimal:

$$m_1(t) = (t-2)(t-3)$$

$$m_2(t) = (t-2)^2 (t-3)$$

$$m_3(t) = (t-2)^3 (t-3)$$

Comenzando con el candidato de menor grado, tenemos que verificar que $m_1(T) = 0$.

En este caso $m_1(T) \neq 0$, pero $m_2(T) = 0$, entonces

$$m_A(t) = (t-2)^2 (t-3)$$

5.a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T(x,y) = (x+y, x-y)$

$$(T)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_T(t) = (1-t)(-1-t) - 1$$
$$= t^2 - 2 = (t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})$$

Entonces $m_T(t) = t^2 - 2$

Obs: Si todas las raíces de $\chi_T(t)$ son distintas

Entonces $m_T(t) = \pm \chi_T(t)$

↳ Lo eligen para que $m_T$ sea mónico

---

b) $T: M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $T(X) = X^t$

Recordar: • $M_n(\mathbb{R}) = \overbrace{M_n^S(\mathbb{R})}^{Y} \oplus \overbrace{M_n^A(\mathbb{R})}^{Z}$ $\quad T(Y)=Y \quad T(Z)=-Z$

simétricas $\quad$ antisimétricas

• Si $\mathcal{B}_S$ y $\mathcal{B}_A$ son bases de $M_n^S(\mathbb{R})$ y $M_n^A(\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}_S \cup \mathcal{B}_A = \mathcal{B}$ es base de $M_n(\mathbb{R})$

formada por vectores propios asociados

a los valores propios 1 y $-1$.

• Como $\mathcal{B}$ es base de vectores propios, el

operador $T$ es diagonalizable sabemos

(Teo 5.3.20) que $m_T(t) = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$.

$\lambda_i$ son raíces

- Por último, los valores propios ($1$ y $-1$) son las raíces de $\chi_T(t)$, por lo tanto también son las raíces de $m_T(t)$.

- Juntando todo $m_T(t) = (t-1)(t+1)$

$$
\left( \begin{array}{l} = t^2 - 1 \\ (A^t)^t - A = A - A = 0 \end{array} \right)
$$

7) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$

$\left.\begin{array}{l} \text{diagonalizable} \\ T^3 - 2T^2 + T = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow T^2 = T$

$p(t) = t^3 - 2t^2 + t = t\,[t^2 - 2t + 1]$

$= t\,(t-1)^2$

Como $T$ es diag: $m_1(t) = t$

$m_2(t) = (t-1)$

$m_3(t) = t(t-1)$

Si es $m_1 \Rightarrow T = 0 \Rightarrow T^2 = T$

$m_2 \Rightarrow T = I \Rightarrow T^2 = T$

$m_3 \Rightarrow m_3(t) = t^2 - t \Rightarrow T^2 - T = 0$

$\Leftrightarrow T^2 = T$

---

8) $T \in \mathcal{L}(V)$ t.q. $\begin{cases} T^3 = T^2 \\ T^4 = T^3 + T^2 - T \end{cases}$

$T^4 = T \circ T^3 = T \circ T^2 = T^3 = T^2$

$\parallel$

$\underbrace{T^3 + T^2 - T}$

$T^2 = T^3 + T^2 - T$

$0 = T^3 - T$

$0 = T^2 - T \rightarrow \boxed{T = T^2}$

Usando el coro 5.3.21

$t(t-1)$

$\hookrightarrow$ Es proyección