

2/11

Def: $A \in M_n(K)$, decimos que A es nilpotente si $\exists k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $A^k = 0_{M_n(K)}$

El orden de nilpotencia es el mínimo $k, k \in \mathbb{Z}^+$

$$A^k = 0 \quad \text{y} \quad A^{k-1} \neq 0$$

Ej: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

En este caso el orden de nilpotencia es 2

Con operadores decimos que T es nilpotente si $\exists k \in \mathbb{Z}^+$

tal que $T^k = 0, \quad T^k = T \circ \dots \circ T$

Si T (o A) es nilpotente, entonces el polinomio minimal es de la forma

$m(t) = t^k$ donde k es el orden de nilpotencia.

- i) $m(T) = T^k = 0$ porque T es nilpotente y k es el orden de nilpotencia
- ii) $\text{grado}(m(t))$ es el mínimo posible, porque el orden de nilpotencia por definición es el mínimo exponente tal que $T^k = 0$
- iii) $m(t)$ es mónico

Prop 5.4.6: T es un operador nilpotente y diagonalizable, entonces T es el operador nulo.

Prop 5.4.8:

i) $J \in M_n(\mathbb{K})$, $J = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow J^{\hat{A}} = 0$
orden de nilp.

ii) $A = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}$ con \leftarrow Forma de Jordan

$J_i = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in M_{p_i}(\mathbb{K})$

con $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_r$
entonces

a) El orden de nilpotencia de A es p_1

b) Cantidad de bloques de Jordan que aparecen en A es igual a $n - \text{rango}(A)$.

OBS: $\text{rango}(A)$ es la suma de los $\text{rango}(J_i)$

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

El orden es 2. $\Rightarrow m_A(t) = t^2$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leadsto \text{forma de Jordan}$$

En la tercera matriz, el orden es 3, y vimos que $n - \text{rango}(A) = 2$ entonces hay dos bloques de Jordan, las posibilidades son:

Uno de tamaño 2×2 y otro de tamaño 1×1

o

Uno de tamaño 1×1 y otro de tamaño 2×2

Como el orden de nilpotencia es 3, sabemos que tiene que aparecer un bloque de tamaño 3×3 , entonces la forma de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teo 5.4.12: Sea T un operador, entonces T es nilpotente si y sólo si existe una base B del espacio V tal que la matriz asociada a T en la base B esta compuesta por bloques de Jordan.

$$(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_K \end{pmatrix}$$

OBS: La cantidad de bloques de Jordan, es igual a la dimensión del $\ker(T)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(T) = \{x = -2y\}$$

$$\ker(T^2) = V$$

$$\{0\} \neq \ker(T) \subsetneq \ker(T^2) = V$$

$$w_i \in \ker(T^2) \setminus \ker(T)$$

$$v = (1, 1)$$

$$\mathcal{B} = \{T(v), v\}$$

En este caso, nos alcanza con $\{T(v), v\}$ porque el único bloque que aparece es de tamaño 2×2 , entonces necesitamos 2 vectores para formar una base de este bloque.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vimos que la forma de Jordan queda:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

3x3

En este caso tenemos dos bloques, y además vimos que el orden de nilpotencia es 3.

2x2

$$\{0\} \neq \ker(T) < \ker(T^2) < \ker(T^3) = V$$

Para hallar una base B de Jordan del espacio, tenemos que hallar bases de cada bloque.

Comenzamos con el bloque 3x3, sabemos que necesitamos 3 vectores, por lo tanto $B_1 = \{T^2(v), T(v), v\}$ en donde v está en $\ker(T^3) = V$ pero no está en $\ker(T^2)$

$$\ker(T^2) = \{(x, y, z, t, w) : t = w + y\}$$

Por ejemplo $v = (0, 1, 0, 0, 0)$

Entonces $T(v) = (0, 0, 1, 1, 1)$ y $T^2(v) = (1, 0, 1, 0, 0)$

Entonces la base del primer bloque es $B_1 = \{T^2(v), T(v), v\}$

Ahora para hallar una base del segundo bloque, tenemos que elegir un vector w que este en $\ker(T^2)$ pero no en el $\ker(T)$

$$\text{Ker}(T^2) = \{(x, y, z, t, w) : t = w + y\}$$

$$\text{Ker}(T) = [(1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0)]$$

Podemos elegir $w = (0, 0, 0, 1, 1)$

Como el segundo bloque tiene tamaño 2×2 , tenemos que

$$B_2 = \{T(w), w\}$$

$$T = L_A$$

Entonces la base $B = \{T^2(v), T(v), v, T(w), w\}$