2/11

Def: $A \in M_n(\mathbb{K})$, decimos que A es nilpotente si $\exists\, k \in \mathbb{Z}^+$ t.q

$$A^k = 0_{M_n(\mathbb{K})}$$

El orden de nilpotencia es el mínimo k, t.q

$$A^k = 0 \quad y \quad A^{k-1} \neq 0$$

Ej: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

En este caso el orden de nilpotencia es 2

Con operadores decimos que T es nilpotente si $\exists\, k \in \mathbb{Z}^+$

tal que $T^k = 0$, $T^k = T \circ \cdots \circ T$

Si T (o A) es nilpotente, entonces el polinomio minimal es de la forma

m(t)=t^k donde k es el orden de nilpotencia.

i) m(T)=T^k =0 porque T es nilpotente y k es el orden de nilpotencia
ii) grado(m(t)) es el mínimo posible, porque el orden de nilpotencia por definición es el mínimo exponente tal que T^k=0
iii) m(t) es mónico

Prop 5.4.6: T es un operador nilpotente y diagonalizable, entonces T es el operador nulo.

Prop 5.48.

i) $J \in M_n(\mathbb{K})$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \underbrace{J^n}_{\text{orden de nilp.}} = 0$

ii) $A = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_s \end{pmatrix}$ ← Forma de Jordan con

$J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in M_{p_i}(\mathbb{K})$

con p1>= p2 >=...>=ps
entonces
a) El orden de nilpotencia de A es p1
b) Cantidad de bloques de Jordan que aparecen en A es igual a n-rango(A).

OBS: rango(A) es la suma de los rango(Ji)

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

El orden es 2. $\Rightarrow m_A(t) = t^2$

$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ forma de Jordan

---

En la tercera matriz, el orden es 3, y vimos que n - rango(A)=2
entonces hay dos bloques de Jordan, las posibilidades son:
Uno de tamaño 2x2 y otro de tamaño 3x3
o
Uno de tamaña 1x1 y otro de tamaño 4x4

Como el orden de nilpotencia es 3, sabemos que tiene que
aparece un bloque de tamaño 3x3, entonces la forma de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teo 5.4.12: Sea T un operador, entonces T es nilpotente si y sólo si existe una base B del espacio V tal que la matriz asociada a T en la base B esta compuesta por bloques de Jordan.

$$(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_K \end{pmatrix}$$

OBS: La cantidad de bloques de Jordan, es igual a la dimensión del ker(T)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \ker(T) = \{x = -2y\}$$

$$\ker(T^2) = V$$

$$\{0\} \neq \ker(T) \subsetneq \ker(T^2) = V$$

$$w_1 \in \ker(T^2) \setminus \ker(T)$$

$$v = (1, 1)$$

$$\mathcal{B} = \{T(v), v\}$$

En este caso, nos alcanza con {T(v),v} porque el único bloque que aparece es de tamaño 2x2, entonces necesitamos 2 vectores para formar una base de este bloque.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vimos que la forma de Jordan queda:

3x3

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2x2

En este caso tenemos dos bloques, y además vimos que el orden de nilpotenica es 3.

{0} != ker(T) < Kert(T^2) < ker(T^3)=V

Para hallar una base B de Jordan del espacio, tenemos que hallar bases de cada bloque.

Comenzamos con el bloque 3x3, sabemos que necesitamos 3 vectores, por lo tanto B1={T^2(v),T(v),v} en donde v está en ker(T^3)=V pero no está en ker(T^2)

$$\ker(T^2) = \{(x,y,z,t,w) : t = w+y\}$$

Por ejemplo v=(0,1,0,0,0)

Entonces T(v)=(0,0,1,1,1) y T^2(v)=(1,0,1,0,0)

Entonces la base del primer bloque es B1={T^2(v),T(v),v}

Ahora para hallar una base del segundo bloque, tenemos que elegir un vector w que este en ker(T^2) pero no en el ker(T)

$Ker(T^2) = \{(x,y,z,t,w) : t = w+y\}$

$Ker(T) = [(1,0,0,0,0),(0,0,1,0,0)]$

Podemos elegir w=(0,0,0,1,1)

Como el segundo bloque tieme tamaño 2x2, tenemos que
B2={T(w),w}

$T = L_A$

Entonces la base $B=\{\underbrace{T^2(v),T(v),v}, \overbrace{T(w),w}\}$