4/9

Recordar: $T \in \mathcal{L}(V)$

$\dim(V) < \infty$

$\lambda \in \mathbb{K}$ es valor propio si $\left\{ \begin{array}{l} T(v) = \lambda v \\ v \neq 0 \end{array} \right.$

En tal caso v es un vector propio.

$A \in M_n(\mathbb{K})$ es diagonalizable si A es semejante a B con B diagonal.

$\Rightarrow \exists\, Q \in M_n(\mathbb{K})$ invertible

tq $A = QBQ^{-1}$

Ej 2.3: $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador.

a) ($\Leftarrow$) Supongamos que $\lambda = 0$ no es valor propio.

Ahora $T: V \to V$ con $\dim(V) < \infty$, usando el teo. de las dimensiones: $\dim(V) = \dim(\operatorname{Ker} T) + \dim(\operatorname{Im} T)$

Entonces para ver que es biyectiva, alcanza con ver sea inyectiva, es decir $\operatorname{Ker} T = \{0\}$

Que $\lambda = 0$ no sea valor propio, por definición quiere decir que $\nexists\ v \in V,\ \underline{v \neq 0}$ tq $T(v) = \underset{\lambda}{\overset{\shortparallel}{0}} \cdot v = 0$

Entonces $T(v) = 0$ si y sólo si $v = 0$.

Es decir $\operatorname{Ker} T = \{0\}$.

($\Leftarrow$) T es invertible $\Rightarrow$ T es inyectiva

$\operatorname{Ker} T = \{0\} \Rightarrow T(v) = 0$ si y sólo si $v = 0$,

entonces $\lambda = 0$ no puede ser valor propio.

---

b) $\underline{T \text{ es invertible}}$.

($\Rightarrow$) Suponemos que λ es valor propio de T.

es decir $\exists\ v \neq 0$ tq $T(v) = \lambda v$, como T es invertible:

$$
\begin{array}{ccc}
T^{-1}(T(v)) & = & T^{-1}(\lambda v) \\
\shortparallel & & \shortparallel \leftarrow T^{-1} \text{ es lineal} \\
v & & \lambda T^{-1}(v)
\end{array}
$$

Como T es invertible, $\lambda \neq 0$, entonces podemos dividir entre λ $\Rightarrow$ $T^{-1}(v) = \lambda^{-1} v$

c) T es invertible.

($\Rightarrow$) Suponemos T es diagonalizable.

Sabemos que para toda base β de V,

$A = {}_\beta(T)_\beta$ es diagonalizable, es decir A es semejante a D matriz diagonal.

$${}_\beta(T)_\beta = Q D Q^{-1}$$

Sabemos ${}_\beta(T^{-1})_\beta = \left({}_\beta(T)_\beta\right)^{-1}$,

Luego $\left({}_\beta(T)_\beta\right)^{-1} = \left(Q D Q^{-1}\right)^{-1}$

$$= (Q^{-1})^{-1} D^{-1} Q^{-1}$$

$$= Q D^{-1} Q^{-1}$$

$$0 \neq \det\left({}_\beta(T)_\beta\right) = \det(Q)\det(D)\det(Q^{-1})$$

$$= \det(D) \Rightarrow \det(D) \neq 0$$

$\Rightarrow$ Entonces D es invertible

$${}_\beta(T^{-1})_\beta = Q D^{-1} Q^{-1}.$$

Recordar que si D es diagonal $\Rightarrow$ D^{-1} también.

Para toda base β, ${}_\beta(T^{-1})_\beta$ es diagonalizable, esto implica que T^{-1} es diagonalizable.

$\rightarrow$ Proposición 1.3.6 de las notas.

6) $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ semejantes

$\chi_A(t) = \det(A - tI)$

$\chi_B(t) = \det(B - tI)$

$\Rightarrow A = QBQ^{-1}$

$$A - tI = QBQ^{-1} - tI = QBQ^{-1} - t\overbrace{QQ^{-1}}^{I}$$

$$= QBQ^{-1} - tQIQ^{-1}$$

$$= QBQ^{-1} - QtIQ^{-1}$$

$$= Q[B - tI]Q^{-1}$$

I siempre conmuta.

t es un escalar

Distributiva

distributiva

$a(a+b)c = aac + abc$

(lo ven en anillos)

$$A - tI = Q[B - tI]Q^{-1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\det(A - tI)}_{\chi_A(t)} = \underbrace{\det(B - tI)}_{\chi_B(t)}$$

Como $\chi_A(t) = \chi_B(t)$, tienen las mismas raíces.

Supongamos que para $n = 2$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1} tr(A)$. $\}$ Lo hacen ustedes

Caso inductivo: Suponemos que para $n = m-1$ se cumple.

$A \in M_m(\mathbb{K})$,

$$\det(A - tI) = \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & B & \\ a_{m1} & & & \end{vmatrix}$$

$B \in M_{m-1}(\mathbb{K})$

a_{m-1} sale de $(a_{11} - t) \det(B) = a_{11} \det(B) - t \det(B)$

---

5) Pensar como queda $\chi_A(t) = \det(A - tI)$ A triangular superior, además usar que los valores propios son los ceros de $\chi_A(t)$.

$A = PBP^{-1}$ ¿tienen los mismos vectores propios?

$Av = \lambda v \Leftrightarrow v$ vector propio de A con valor propio λ.

$\Rightarrow \underset{\lambda v}{\overset{\shortparallel}{Av}} = PBP^{-1}v \} PBP^{-1}v = \lambda v$

Multiplicas por P^{-1} : $\overbrace{P^{-1}P}^{I}\, B\, P^{-1} v = P^{-1} \lambda v$ ← λ escalar

$$B \underbrace{P^{-1} v}_{w} = \lambda \underbrace{P^{-1} v}_{w}$$

$$\Big(\quad\Big)_{n \times n} \Big(\ \Big)_{n \times 1} = \Big(\ \Big)_{n \times 1}$$

$B w = \lambda w \Rightarrow$ w es el vector propio de B con valor propio λ.

$w = P^{-1} v \overset{?}{=} v$ No sabemos.