9/9

7) $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

¿ || ?

$\chi_{A^t}(\lambda) = \det(A^t - \lambda I)$

escalar $\qquad I^t = I$

$(A - \lambda I)^t = A^t - (\lambda I)^t = A^t - \lambda (I)^t = A^t - \lambda I$

$\chi_A(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \det(A - \lambda I) \overset{\text{propiedad de det}}{=} \det\left([A - \lambda I]^t\right) = \det(A^t - \lambda I) \overset{\text{def}}{=} \chi_{A^t}(\lambda)$

---

8) A es una matriz escalar si $A = \lambda I$ con $\lambda \in \mathbb{K}$

a) A semejante a $E = \lambda I$, es decir $\exists\, Q \in M_n(\mathbb{K})$

tq $A = Q E Q^{-1}$

$= Q \lambda I Q^{-1}$

I siempre conmuta

$= Q \lambda Q^{-1} I$

$= \lambda \underbrace{Q Q^{-1}}_{I} I$

Los escalares siempre conmutan

$= \lambda I I = \lambda I = E$

b) $\underbrace{A \text{ diagonalizable}}$ con un único valor propio.

$A = Q D Q^{-1}$

$\hookrightarrow$ D diagonal formado por valores propios

$Q = \left(v_{\lambda_1} \middle| \tilde{v}_{\lambda_1} \middle| v_{\lambda_2}\right)$

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I$, es decir

D es una matriz escalar.

Usar parte (a).

c) Deducir que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable.

$\chi_A(t) = (2-t)^2 \rightarrow$ Entonces el único valor propio es 2.

Si fuese diagonalizable, entonces $A = \lambda I$ por la parte (b), pero $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \lambda I \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$

a)

3) $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & -i \end{pmatrix}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\boxed{i^2 = -1}$

Valores propios: $\chi_A(\lambda) = (i-\lambda)(-i-\lambda) - 2$

$= \lambda^2 - \cancel{\lambda i + \lambda i} - i^2 - 2 = \lambda^2 - 1$

Las raíces son ± 1 : $\lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$.

↳ Los valores propios son ± 1.

$$\begin{pmatrix} i-1 & 1 \\ 2 & -i-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$E_1 = Ker(A - 1 \cdot I) = Ker \begin{pmatrix} i-1 & 1 \\ 2 & -i-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (i-1)x + y = 0 & (i) \\ 2x - (i+1)y = 0 & (ii) \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} i-1 & 1 \\ 2 & -i-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y = -(i-1)x \Rightarrow 2x + (i+1)(i-1)x = 0$$

$$2x + [i^2 + i - i - 1]x = 0$$

$$2x + [-1 - 1]x = 0$$

$$2x - 2x = 0$$

$\boxed{2x = 2x} \Rightarrow x$ está libre.

Si $x = 1 \Rightarrow y = 1 - i$

$$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : y = (1-i)x, \ x \text{ libre}\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : (x,y) = \lambda(1, 1-i) \text{ con } \lambda \in \mathbb{C}\}$$

$$E_{-1} = Ker(A - (-1 \cdot I)) = Ker(A + I)$$

b) $\chi_A(\lambda)$ es cinde por que $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

$M_{G}(1)=M_A(1)$

$M_{G}(-2)=M_A(-2)$

$\left.\right\}$ Implica que A es diagonalizable

$\Rightarrow$ Una proposición nos dice: $1 \leq M_G(\lambda) \leq M_A(\lambda)$

<u>Coro</u>: Si todos los valores propios son distintos y $\chi_A(\lambda)$ <u>escinde</u>, entonces A es diagonalizable.

$\Rightarrow$ Las raíces de $\chi_A(\lambda)$ están en el cuerpo que trabajamos.

c) $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $Q=\left(v_1 \mid v_2 \right)$ $(0,0)\neq v_1 \in E_1$

$(0,0)\neq v_2 \in E_{-2}$

$D=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q=\left(v_2 \mid v_2 \right)$

---

10) $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_A(t)=(-t)^2+1=t^2+1 \Rightarrow t^2+1=0$

$t^2=-1 \Rightarrow \chi_A(t)$ No escinde en los Reales.

$t=\pm\sqrt{-1}$

$t=\pm i$

En $\mathbb{K}=\mathbb{C} \Rightarrow t^2+1=(t-i)(t+i)$

Como los valores son distintos ⇒ Si A fuese diagonalizable tendría que pasar que $\chi_A(t)$ escinde y en $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

En $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ no hay problemas.

b) Hallar $Q \in M_2(\mathbb{C})$ tq $Q^{-1}AQ$ sea diagonal

Q formada por vectores propios nos sirve, ya que

$$A = QDQ^{-1}$$

$$Q^{-1}A = DQ^{-1}$$

$$Q^{-1}AQ = D$$

D es diagonal. (formada por valores propios)

12)

c) $V = \mathbb{C}^2$, $\quad T(z,w) = (z + iw,\ iz + w)$

$(z,w) \in \mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$

$\tilde{\varphi} = \{(1,0),(0,1),(i,0),(0,i)\} \to$ Como $\mathbb{R}$-espacio vectorial

$\varphi = \{(1,0),(0,1)\} \to$ Como $\mathbb{C}$ espacio vectorial

Usaremos esta.

$Coord_{\varphi}(T(1,0)) = (\lambda_1, \lambda_2)$

$T(1,0) = (1, i) = \overset{1}{\lambda_1}(1,0) + \overset{i}{\lambda_2}(0,1)$

$T(0,1) = (i, 1)$.

$$A = (T)_{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos si es diagonalizable.

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & i \\ i & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - \underbrace{i^2}_{-1}$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 1$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(2)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2}$$

Recordar: $\sqrt{-4} = \sqrt{4\cdot(-1)} = \sqrt{4}\,\sqrt{-1} = 2i$

Entonces $\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 + i \\ \lambda_2 = 1 - i \end{array}\right\}$ $\chi_A(\lambda)$ escinde y

$M_G(\lambda_i) = M_A(\lambda_i)$ con $i = 1,2$

Entonces $(T)_{\varphi}$ es diagonalizable.

Por lo tanto T es diagonalizable.

$T(1,0) = \lambda (1,0)$

$T(0,1) = \mu (0,1)$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$