11/9

Práctico 3

1) $T: M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$

$A \mapsto A^t$

propiedad transpuesta

a) $T(A+B) = (A+B)^t = A^t + B^t = T(A) + T(B)$

$T(\lambda A) = (\lambda A)^t = A^t \lambda^t = A^t \lambda = \lambda A^t = \lambda T(A)$

propiedad

λ escalar

Entonces T es lineal.

$S = \{B \in M_n(\mathbb{R}) : B^t = B\}$

Recordar que $M_n(\mathbb{R}) = S \oplus AS$

$AS = \{B \in M_n(\mathbb{R}) : B^t = -B\}$

Si $A \in M_n(\mathbb{R}) \Rightarrow$ i) $A \in S$

ó ii) $A \in AS$

ó iii) $A = C + D$

valor propio

i) Si $B \in S \Rightarrow T(B) = B^t = B = 1 \cdot B$

ii) Si $B \in AS \Rightarrow T(B) = B^t = -B = -1 \cdot B$

valor propio.

iii) Si $B = C + D$, $C \in S$, $D \in AS$

$T(C+D) = (C+D)^t = C^t + D^t = C - D$

¿$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $T(\overbrace{C+D}^{v}) = \lambda(\overbrace{C+D}^{v})$?

No puede ser, pues $\lambda(C+D) = \lambda C + \lambda D$ } No existe

$T(C+D) = C - D$ } λ que haga eso.

b) ¿Cuáles son los subespacios E_1, E_{-1}?

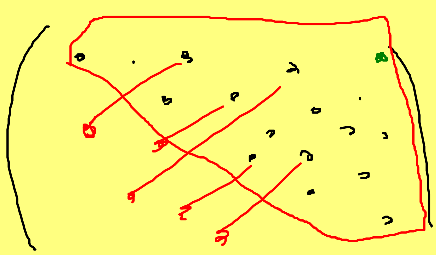
E_1 es el espacio formado por los vectores propios que tienen valor propio, más el vector nulo.

Entonces $E_1 = S = \{B \in M_n(\mathbb{R}) : B^t = B\}$

$E_{-1} = AS = \{B \in M_n(\mathbb{R}) : B^t = -B\}$

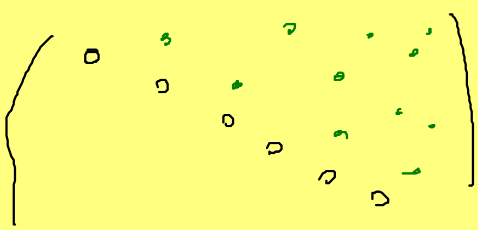
c) $Mg(E_1) + Mg(E_{-1}) = n^2 = \dim(M_n(\mathbb{R}))$

$$2 \le \underbrace{Mg(E_1) + Mg(E_{-1})}_{n^2} \le MA(E_1) + MA(E_{-1}) \le n^2$$



$n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1$

$$Mg(E_1) = \sum_{k=0}^{n-1} n-k = n \cdot \frac{(n-1)}{2} + n$$



$$\sum_{k=1}^{n-1} n-k = n\frac{(n-1)}{2} = Mg(E_{-1})$$

$$Mg(E_1) + Mg(E_{-1}) = n + n\frac{(n-1)}{2} + n\frac{(n-1)}{2} = n^2$$

Estoy usando que la dimensión de un espacio, es igual a los grados de libertad.

Ej: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \dim(M_2(\mathbb{K})) = 4 = 2^2$

Si es simétrica: $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \to \dim(S) = 3$

Si es antisimétrica $\begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix} \to \dim(S) = 1$

$1 + 3 = 4$

Otra forma: Como $M_n(\mathbb{R}) = S \oplus AS$, y

las matrices simétricas y antisimétricas son vectores propios

Podemos encontrar una base $\mathcal{B}$ de S formada por matrices simétricas.

De igual manera podemos encontrar una base $\mathcal{C}$ de AS formada por matrices antisimétricas.

Como $M_n(\mathbb{R}) = S \oplus AS \Rightarrow \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ es base de $M_n(\mathbb{R})$

Aparte

$T(v) = \lambda v$

$w = \alpha v \Rightarrow T(w) = T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha \lambda v = \lambda \alpha v = \lambda w$

$\alpha \neq 0$

Es decir si v es vector propio con valor propio λ, entonces todo múltiplo (no nulo) de v

es vector propio, y además asociado al mismo valor propio.

---

2) Si $A = QDQ^{-1}$ con diagonal $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$

entonces $A^n = QD^nQ^{-1}$ y $D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m^n \end{pmatrix}$

---

3) T es nilpotente si $\exists\, n \in \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$ tq $T^n = 0$ (cero como operador)

a) $\left.\begin{array}{l} T \text{ nilpotente} \\ \lambda \text{ valor propio} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = 0$

En el práctico 2 vimos que si λ es valor propio de T, entonces λ^n es valor de T^n. Sea v vector propio.

$0 \underset{\substack{\uparrow \\ T \text{ nilpotente}}}{=} T^n(v) = \lambda^n v \left.\right\}$ $\lambda^n v = 0$

Como v es vector propio $\Rightarrow v \neq 0 \Rightarrow \lambda^n v = 0$ si y sólo si $\lambda^n = 0$ si y sólo si $\lambda = 0$

b) T diagonalizable } T nilpotente } $\Longrightarrow T \equiv 0$.

T diagonalizable $\Longrightarrow (T)_{\beta} = Q\, D\, Q^{-1}$ con D diagonal

T nilpotente $\Longrightarrow$ El único valor propio es 0, entonces D es matriz nula.

$\Longrightarrow (T)_{\beta} = Q D Q^{-1} = 0_{n \times n}$

Como $(T)_{\beta} = 0_{n \times n}$, entonces T es el operador nulo.

---

4) T diagonalizable

($\Longrightarrow$) Supongamos que T es una proyección ($T^2 = T$)

Sean λ valor propio, $T^2(v) = \lambda^2 v$
y v vector propio $T(v) = \lambda v$

Como T es proyección $T^2 = T$ si y sólo si

$\lambda^2 v = \lambda v$ si y sólo si $(\lambda^2 - \lambda) v = 0$
$v \neq 0$ porque es vector propio

Entonces $\lambda^2 = \lambda$ si y sólo si $\lambda \in \{0, 1\}$

($\Leftarrow$) Suponemos que los únicos valores propios son 0 y 1.

$(T)_\beta = Q D Q^{-1}$ por ser diagonalizable con D es diagonal con entradas 0 ó 1.

$(T^2)_\beta = (T)_\beta^2 = Q D^2 Q^{-1}$.

Como D es diagonal $\Rightarrow$ D^2 es elevar las entradas de la diagonal al cuadrado.

Como las entradas de D son 0 ó 1, $\underbrace{\text{entonces } D^2 = D, \text{ entonces:}}$

$(T^2)_\beta = Q D^2 Q^{-1} = Q D Q^{-1} = (T)_\beta$, entonces

$T^2 = T$, entonces es una proyección.

Otra forma: Suponer que no es proyección, es decir $T^2(v) \neq T(v)$, ahora sea v vector propio: $T^2(v) = \lambda^2 v \neq \lambda v = T(v)$ $\lightning$

pues $\lambda = 0$ ó $\lambda = 1$

5)

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \end{array}\right\} \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad \forall n \geq 2$$

$$a_3 = a_1 + a_2 = 2$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 3$$

a) Encontrar una matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ tq

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_n = b \cdot a_{n-1} + c \cdot a_{n-2} \\ a_{n-1} = d \cdot a_{n-1} + e \cdot a_{n-2} \end{cases}$$

Entonces b=c=d=1, y e=0