Probabilidad 2020 — Centro de Matemática — Práctico 1

Primeras tareas:

- Leer el **Manual de curso: Probabilidad 2020**
- Instalar el software (libre)
  - `https://www.r-project.org/` (Download)
  - `https://www.rstudio.com/` (Download)
- Descargar el libro **Teoría de la Probabilidad**, de Valentín V. Petrov y E. Mordecki, Editorial DIRAC, 2008.

Ejercicios:

1. Un blanco se compone de 5 círculos concéntricos con radios $0 < r_1 < r_2 < r_3 < r_4 < r_5$. El suceso $\mathbf{A}_k$ consiste en acertar en el círculo de radio r_k. Explicar que significan los sucesos $\mathbf{B} = \bigcup_{k=1}^{5} \mathbf{A}_k$, $\mathbf{C} = \bigcap_{k=1}^{5} A_k$, y $\mathbf{D} = \overline{\mathbf{A}}_1\mathbf{A}_2$.

2. Demostrar que para dos sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ arbitrarios, las siguientes cuatro relaciones son equivalentes: (a) $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$; (b) $\overline{\mathbf{B}} \subset \overline{\mathbf{A}}$; (c) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{B}$; (d) $\mathbf{A}\overline{\mathbf{B}} = \emptyset$.

3. Un trabajador fabrica distintos productos. Sea $\mathbf{A}_k$ $(k = 1, \dots, n)$ el suceso que consiste en que el producto k-ésimo sea defectuoso. Escribir los sucesos: (a) ni uno de los productos es defectuoso; (b) por lo menos uno de los productos es defectuoso; (c) solamente uno de los productos es defectuoso.

4. Se tiran dos dados en forma consecutiva. El suceso $\mathbf{A}$ consiste en que la suma de puntos obtenidos sea par; el suceso $\mathbf{B}$, en que por lo menos en uno de los dados aparezcan 6 puntos. Describa los sucesos $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{A}\overline{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{AB}}$.

5. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ sucesos arbitrarios. El suceso $(\mathbf{A}\setminus\mathbf{B})\cup(\mathbf{B}\setminus\mathbf{A})$ se denomina *diferencia simétrica* entre los sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, y se designa mediante $\mathbf{A}\triangle\mathbf{B}$. Demostrar que: (a) $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=(\mathbf{AB})\cup(\mathbf{A}\triangle\mathbf{B})$; (b) $\mathbf{A}\triangle\overline{\mathbf{A}}=\Omega$; (c) $\mathbf{A}\triangle\Omega=\overline{\mathbf{A}}$.

6. Demostrar que para cualquier sucesión de sucesos $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\dots$ vale la igualdad

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbf{A}_n=\mathbf{A}_1\cup(\overline{\mathbf{A}}_1\mathbf{A}_2)\cup(\overline{\mathbf{A}}_1\overline{\mathbf{A}}_2\mathbf{A}_3)\cup\dots.$$

7. Demostrar que si $\mathbf{A}_1\subset\mathbf{A}_2\subset\mathbf{A}_3\subset\cdots$, entonces existe el límite

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(\mathbf{A}_n)=\mathbf{P}(\mathbf{A}),$$

donde $\mathbf{A}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbf{A}_n$.

8. Demostrar que $\mathbf{P}(\mathbf{AB})\geq\mathbf{P}(\mathbf{A})-\mathbf{P}(\overline{\mathbf{B}})$ para sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ arbitrarios.

9. Demostrar que se verifica $\mathbf{P}\big(\bigcup_{k=1}^{n}\mathbf{A}_k\big)\geq 1-\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(\overline{\mathbf{A}}_k)$ para sucesos $\mathbf{A}_1,\dots,\mathbf{A}_k$ arbitrarios.

10. Demostrar que $\mathbf{P}\big(\bigcup_{k=1}^{n}\mathbf{A}_k\big)=1-\mathbf{P}\big(\bigcap_{k=1}^{n}\overline{\mathbf{A}}_k\big)\leq\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(\mathbf{A}_k)$, para sucesos $\mathbf{A}_1,\dots,\mathbf{A}_n$ arbitrarios.

11. Demostrar que $\mathbf{P}(\mathbf{A}\setminus\mathbf{B})=\mathbf{P}(\mathbf{A})-\mathbf{P}(\mathbf{AB})$ para sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ arbitrarios.

12. Demostrar la igualdad

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbf{A}_n\Big)=\mathbf{P}(\mathbf{A}_1)+\mathbf{P}(\overline{\mathbf{A}}_1\mathbf{A}_2)+\mathbf{P}(\overline{\mathbf{A}}_1\overline{\mathbf{A}}_2\mathbf{A}_3)+\cdots$$
$$+\mathbf{P}(\overline{\mathbf{A}}_1\dots\overline{\mathbf{A}}_{n-1}\mathbf{A}_n)+\cdots$$

donde $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2\dots$ es una sucesión de sucesos arbitrarios.

13. En el ejercicio 4 calcular las probabilidades de los sucesos $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{A}\overline{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{AB}}$.

14. Una urna contiene 4 bolas blancas y 5 negras. Se eligen tres bolas al azar. Calcular las probabilidades de que: (a) todas las bolas extraídas sean blancas; (b) todas las bolas extraídas sean negras; (c) se extraiga una bola blanca y dos negras.

15. Para obtener el premio mayor en una lotería se precisa acertar 5 números elegidos entre 49. Calcular la probabilidad de obtener el premio mayor en esta lotería.

16. De un mazo de 52 cartas se eligen 4 cartas al azar. Calcular la probabilidad de que se extraigan: (a) por lo menos un as; (b) no menos de dos ases.

17. Se considera un experimento consistente en arrojar un dado dos veces consecutivas. Calcular la probabilidad de que la suma de los resultados sea: (a) igual a 5; (b) no mayor de 5.

18. `Calcular las probabilidades del ejercicio anterior mediante R. Para eso se puede hacer un bucle doble que repase los 36 resultados posibles y que en cada uno de ellos cuente si son favorables.`

19. Hallar la probabilidad de que al tirar un dado tres veces consecutivas, la suma de los resultados sea no menor que 16.

20. `Calcular la probabilidad del ejercicio anterior mediante R. Para eso, en este caso, se puede hacer un bucle triple.`

21. Calcular la probabilidad de que se acepte una partida de 100 unidades, 5 de las cuales están falladas, si se toman de muestra la mitad, y las condiciones para aceptarla son contener a lo sumo un 2 % de unidades falladas.

22. Se tienen K urnas con n bolas cada una, numeradas de 1 a n. De cada urna se elige al azar una bola. Hallar la probabilidad de que el número mayor resultante sea m ($m = 1, \dots, n$).

23. Tres jugadores A, B y C extraen por turno una bola cada uno, de una urna que contiene 10 bolas blancas y 10 bolas negras. Las bolas extraídas no se reponen, y gana el primero que extrae una bola blanca. Calcular la probabilidad de que gane cada uno de los jugadores A, B, y C.

24. De una urna que contiene 4 bolas blancas y 2 negras se extrae al azar una bola, que luego se pone en una segunda urna, que tiene 3 bolas blancas y 4 negras. Calcular la probabilidad de que una bola extraída de la segunda urna sea blanca.

25. Un estudiante asiste a un examen sabiendo solo 15 de las 20 preguntas del programa. En el billete del examen hay 3 preguntas. Calcular la probabilidad de que el estudiante sepa las 3 preguntas, de las dos formas siguientes: (a) aplicando las reglas clásicas del cálculo de probabilidades; (b) utilizando la noción de probabilidad condicional.

26. En una mesa hay tres armas de tipo A y una de tipo B. La probabilidad de acertar en el blanco con un arma de tipo A es de 0,7, y la de acertar con un arma de tipo B es 0,4. Se elige al azar un arma y se dispara un tiro al blanco. Calcular: (a) la probabilidad de fallar el tiro; (b) la probabilidad de haber elegido un arma de tipo B, sabiendo que el tiro falló.

27. En un partido de las eliminatorias, Uruguay debe tirar un penal. Se elige, con equi-probabilidad, quien ejecuta el tiro penal, entre tres jugadores: Suárez, Cavani, y un suplente. La estadística de Suarez cuenta con 97 aciertos de cada 100, la de Cavani con 95 cada 100, y la del suplente con 60 de cada 100. (a) Calcular la probabilidad de que el tiro se erre. (b) Si el tiro penal se erra: ¿Cuál es la probabilidad de que lo haya pateado el suplente?

28. En una caja hay 4 pelotas de tenis nuevas y 2 usadas. Para un primer partido, se eligen 2 pelotas al azar, y luego se retornan a la caja. Se eligen otras dos pelotas de la misma caja para un segundo partido. Calcular la probabilidad de que ambas sean nuevas.

29. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos sucesos arbitrarios, con $\mathbf{P}(\mathbf{A}) > 0$. Demostrar la desigualdad

$$\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}) \geq 1 - \frac{\mathbf{P}(\overline{\mathbf{B}})}{\mathbf{P}(\mathbf{A})}.$$

30. Los sucesos $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son tales que: $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son independientes; $\mathbf{A}$ y $\mathbf{C}$ son incompatibles; $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son independientes; $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = 0{,}6$, $\mathbf{P}(\mathbf{B}) = 0{,}4$ y $\mathbf{P}(\mathbf{C}) = 0{,}1$. Calcular las probabilidades de los sucesos $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$ y $\mathbf{A}\overline{\mathbf{B}}$.

31. Demostrar que si los sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son independientes, y ambos tienen probabilidad positiva, entonces no pueden ser incompatibles.

32. Demostrar que si $\mathbf{A}$ es un suceso arbitrario, y $\mathbf{B}$ es tal que $\mathbf{P}(\mathbf{B}) = 0$, entonces $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son independientes.

33. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos sucesos independientes, y tales que $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$. Demostrar que si $\mathbf{P}(\mathbf{A}) \neq 0$, entonces $\mathbf{P}(\mathbf{B}) = 1$.

34. La probabilidad de detectar un avión que vuela en una determinada región, por medio de un radar, es 0,9. En esta región operan en forma independiente tres radares. Calcular la probabilidad de que se detecte un avión en esa zona: (a) mediante los tres radares; (b) mediante por lo menos un radar.

35. En la fabricación de un cierto aparato se utilizan dos piezas del mismo tipo. Para que el aparato funcione, se precisa que por lo menos una de las piezas no esté fallada. La probabilidad de que la pieza esté fallada es 0,05. Calcular, bajo el supuesto de independencia, la probabilidad de que el mencionado aparato funcione.

36. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ sucesos independientes dos a dos y equiprobables, cada uno de los cuales tiene probabilidad p. Supongamos que $\mathbf{P}(\mathbf{ABC}) = 0$. Hallar el valor de p que hace que la probabilidad de el suceso $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}$ sea máxima.

37. *Captura y recaptura.* Para saber cuantos peces hay en un lago se utiliza el siguiente procedimiento. Se pescan 50 peces, se los marca, y se los devuelve al lago. Luego se pescan otros 50 peces, se cuenta la cantidad de peces marcados, supongamos que es N, y mediante una regla de tres se estima el total de peces en el lago. (a) Estimar, en función de N, la cantidad total de peces en el lago. (b) Calcular, suponiendo que $N = 3$, como función de n, el número total de peces en el lago, la probabilidad de obtener 3 peces al extraer 50. (c) `Graficar esta cantidad como función de` n `y determinar el` n `para el cual esta probabilidad es máxima.`