Probabilidad - Clase 1

Ernesto Mordecki

Facultad de Ciencias, Universidad de la República. Montevideo, Uruguay

Curso de la Licenciatura en Matemática - 2020

Contenidos de la clase

Sobre la organización del curso

Primeras tareas

- Leer el **Manual de curso: Probabilidad 2020**
- Instalar el software (libre)

  R RStudio.

  - `https://www.r-project.org/` (Download)
  - `https://www.rstudio.com/` (Download)
- Descargar el libro **Teoría de la Probabilidad**, de Valentín V. Petrov y E. Mordecki, Editorial DIRAC, 2008.

Introducción a la probabilidad

- Fenómenos aleatorios y determinísticos.
- Ejemplos: tirar una moneda, tirar un proyectil
- Experimento: conjunto de condiciones en las cuales se produce un fenómeno físico
- Suceso: resultado posible de un experimento: **A**, **B**, $\mathbf{C}_n$

Frecuencia de un suceso

- Frecuencia de un suceso en una repetición N veces de un mismo experimento: $f(\mathbf{A}) = \frac{n(\mathbf{A})}{N}$
- Propiedades de una frecuencia:
  1. $0 \leq f(\mathbf{A}) \leq 1$ para cualquier suceso **A**
  2. $f(\Omega) = 1$ si Ω representa el suceso *cierto* o *indefectible*
  3. $f(\mathbf{A} \text{ ó } \mathbf{B}) = f(\mathbf{A}) + f(\mathbf{B})$ si **A** y **B** son incompatibles (es decir, no pueden ocurrir en forma simultánea)

- Si para un experimento aleatorio se verifica una *estabilidad* de las frecuencias al realizar un gran número de experimentos, se podría definir la **probabilidad** de este suceso como el valor en el cual se estabilizan las frecuencias.
- Sin embargo, las consideraciones anteriores no son suficientes para la construcción de una teoría matemática de la probabilidad.
- Esta se hace actualmente mediante un **sistema axiomático**, que estudiaremos a continuación.

Conceptos básicos: sucesos

- Consideramos un conjunto Ω que llamamos *espacio de sucesos elementales*
- Los puntos de este conjunto, denotados $\omega \in \Omega$, se llaman *sucesos elementales*
- Sea $\mathcal{A}$ una familia no vacía de subconjuntos de Ω que verifica

  (S1) Si $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ entonces $\Omega \setminus \mathbf{A} \in \mathcal{A}$

  (S2) Si $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots$ es una familia finita o numerable de conjuntos de $\mathcal{A}$ entonces $\cup_n \mathbf{A}_n \in \mathcal{A}$.

- La familia $\mathcal{A}$ se llama *σ-álgebra de sucesos* y sus elementos (subconjuntos de Ω) son los *sucesos*.

Propiedades de las σ-álgebras

Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra. Se verifica:

- $\Omega \in \mathcal{A}$. Porque existe algún $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$, tenemos $\Omega \setminus \mathbf{A} = \mathbf{A}^c \in \mathcal{A}$, por S1. Uniendo estos dos conjuntos tenemos Ω y aplicamos S2.
- $\emptyset \in \mathcal{A}$ Dem: ejercicio.
- Si $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots$ es una familia finita o numerable de conjuntos de $\mathcal{A}$ entonces $\cap_n \mathbf{A}_n \in \mathcal{A}$. Dem: aplicar la identidad de De Morgan para complementos de conjuntos.

Ejemplos de σ-álgebras

- $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset\}$
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ (las partes de Ω)
- $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset, \mathbf{A}, \mathbf{A}^c\}$
- Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2 \ldots\}$ es un conjuntos finito o numerable, utilizaremos siempre $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

Axiomas de la teoría de la probabilidad

Consideremos Ω, una σ–álgebra $\mathcal{A}$. Las tres proposiciones siguientes componen el sistema de axiomas de la la teoría de la probabilidad:

Axioma I. A cada suceso **A** le corresponde un número no negativo $\mathbf{P}(\mathbf{A})$, llamado *probabilidad* del suceso **A**.

Axioma II. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

Axioma III. Si $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots$ es un conjunto finito o numerable de sucesos incompatibles dos a dos, entonces

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_i \mathbf{A}_i\right) = \sum_i \mathbf{P}(\mathbf{A}_i).$$

Este sistema de axiomas fue propuesto por A. N. Kolmogorov en 1933 y es el utilizado en la actualidad.

Comentarios

- En análisis real, una probabilidad **P** es una función de conjunto numerablemente aditiva y no negativa (es decir, una medida positiva), que cumple $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, con **P** probabilidad definida para los sucesos de $\mathcal{A}$ es un *espacio de probabilidad*.

- En análisis real, un espacio de probabilidad es un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$ con una medida no negativa **P**, que verifica $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

Ejemplo: Modelo de Bernoulli

$$\Omega = \{\omega_1 \text{ (éxito) }, \omega_2 \text{ (fracaso)}$$

Modela el tirar por única vez una moneda al aire, con posibles resultados: cara o número.
Tomamos $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_1, \omega_2\} = \Omega\}.$$

Definimos

$$\mathbf{P}(\emptyset) = 0, \quad \mathbf{P}(\{\omega_1\}) = \mathbf{P}(\{\omega_2\}) = 1/2, \quad \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

Es sencillo ver que las probabilidades así definidas verifican todos los axiomas.

Sin embargo...

La forma indicada de probabilidades no es única. Elegimos $0 < p < 1$ y definimos

$$\mathbf{P}(\emptyset) = 0, \quad \mathbf{P}(\{\omega_1\}) = p, \quad \mathbf{P}(\{\omega_2\}) = 1 - p, \quad \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

también verifica todos los axiomas.

- El caso primero es un caso particular del segundo si $p = 1/2$
- El caso segundo sirve para monedas no equilibradas
- la no unicidad resulta una **ventaja** del sistema de axiomas.

Probabilidades finitas

Consideramos un espacio de sucesos elementales finito:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

Sirve por ejemplo para modelar el resultado de tirar una moneda ($n = 2$), un dado ($n = 6$), dos dados ($n = 36$), etc.

La σ-álgebra

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$$

El conjunto $\mathcal{A}$ está formado por los siguientes elementos:

- el conjunto vacío $\emptyset$;
- n conjuntos de un único elemento $\{\omega_1\}, \ldots, \{\omega_n\}$;
- C_2^n conjuntos de dos elementos $\{\omega_1, \omega_2\}, \ldots, \{\omega_1, \omega_n\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \ldots, \{\omega_2, \omega_n\}, \ldots, \{\omega_{n-1}, \omega_n\}$;
- C_3^n conjuntos de tres elementos $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}, \ldots, \{\omega_{n-2}, \omega_{n-1}, \omega_n\}$;
- $\ldots$
- $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, un único conjunto de n elementos.

Observemos que la cantidad de elementos del conjunto $\mathcal{A}$ es igual a

$$1 + n + C_2^n + \cdots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$

Otra forma de ver que $\mathcal{A}$ tiene 2^n elementos es la siguiente: Cada elemento de $\mathcal{A}$ es una tira $e_1 e_2 \cdots e_n$ de n ceros y unos (es una **biyección entre conjuntos**). El primer dígito e_1 indica la presencia (si es 1) o la ausencia (si es 0) del primer elemento, y así sucesivamente. Tenemos por ejemplo

$$000 \cdots 0 = \emptyset, \qquad 111 \ldots 1 = \Omega$$

y también

$$10 \ldots 0 = \{\omega_1\}, \qquad 1010 \ldots 0 = \{\omega_1, \omega_3\}.$$

Como hay 2^n tiras, hay 2^n conjuntos en $\mathcal{A}$.

Asignación de probabilidades

Lo hacemos en dos etapas:

- $\mathbf{P}(\omega_i) = p_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, donde $p_1, \ldots, p_n$ son números no negativos, y tales que $p_1 + \cdots + p_n = 1$.

- Si $\mathbf{A}$ está compuesto por k puntos de Ω:

$$\mathbf{A} = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\},$$

  donde $i_1, i_2, \ldots, i_k$ son k números distintos dos a dos elegidos entre los naturales $1, 2, \ldots, n$. Asignamos

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \sum_{m=1}^{k} \mathbf{P}(\omega_{i_m}),$$

Las probabilidades así definidas verifican todos los axiomas. Es el modelo matemático de un experimento con n resultados posibles.

Regla clásica de Laplace

En 1812 P.S. de Laplace definió una fórmula para calcular probabilidades mediante

Casos favorables sobre casos posibles

Veamos que es un caso particular de la probabilidad definida axiomaticamente. Para eso en el modelo anterior tomamos

$$p_1 = p_2 = \cdots = \frac{1}{n}$$

Obtenemos

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{|\mathbf{A}|}{|\Omega|} = \frac{|\mathbf{A}|}{N} = \frac{\text{casos favorables (en } \mathbf{A})}{\text{casos posibles (en } \Omega)}$$

Si el experimento consiste en tirar, por única vez, un dado equilibrado ($n = 6$), tenemos $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, y $p_i = 1/6$.
Si se trata de un dado intencionalmente adulterado, se asignan otras probabilidades, que considere la disparidad entre las distintas caras del dado.

Probabilidades numerables

El ejemplo de probabilidades finitas se extiende al caso

$$\Omega = \{\omega_i \colon i \in \mathbb{N}\}$$

para asignación de probabilidades las dos etapas son

- $\mathbf{P}(\omega_i) = p_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, donde $\{p_i\}$ es una sucesión de números no negativos, y tales que $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.
- Si $\mathbf{A}$ es son puntos de Ω:

  $$\mathbf{A} = \{\omega_{i_k} \colon k \in \mathbb{N}\},$$

  donde $\{i_k\}$ es un conjunto finito o una subsucesión de $\mathbb{N}$
  Asignamos

  $$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\omega_{i_k}),$$

Las probabilidades así definidas verifican todos los axiomas.
Es el modelo matemático de un experimento con una cantidad numerable de resultados posibles.

Ejemplo de probabilidades numerables

Supongamos que tiramos una moneda hasta obtener una cara. La lista de resultados posibles es

$$C, \quad CN, \quad CCN, \quad CCCN, \quad \ldots$$

Es numerable. En este caso precisamos para definir probabilidades un modelo como el anterior.

Probabilidades continuas

- Sea
$$\Omega = [0,1]$$

- Sea $\mathcal{A}$ la σ–álgebra de los conjuntos borelianos de este intervalo[1].

- Sea además $\mathbf{P}$ la medida de Lebesgue.

- La terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ es un espacio de probabilidad. Observemos que para cada intervalo $\mathbf{I} = (a, b)$ contenido en $[0, 1]$, tenemos
$$\mathbf{P}(\mathbf{I}) = b - a,$$
es decir, la probabilidad del intervalo (a, b) coincide con la longitud de este intervalo.

[1] La clase de los subconjuntos borelianos de un cierto intervalo **J** es la mínima σ–álgebra de conjuntos de puntos del intervalo **J**, que contiene a todos los subintervalos de **J**.

Si llegaron hasta aquí: ¡gracias por la atención!