Probabilidad - Clase 2

Ernesto Mordecki

Facultad de Ciencias, Universidad de la República. Montevideo, Uruguay

Curso de la Licenciatura en Matemática - 2020

Respaso: Axiomas de la probabilidad

- Sucesos y σ-álgebras
- Axiomas de la probabilidad
- Probabilidades finitas
- Regla clásica de Laplace

Lo nuevo: Notación de la probabilidad

Primeras consecuencias de los axiomas

- Propiedades para un suceso
- Propiedades para una familia finita de sucesos
- Continuidad de la probabilidad

Solución de un ejercicio en R studio

Conceptos básicos: sucesos

- Consideramos un conjunto Ω que llamamos *espacio de sucesos elementales*
- Los puntos de este conjunto, denotados $\omega \in \Omega$, se llaman *sucesos elementales*
- Sea $\mathcal{A}$ una familia no vacía de subconjuntos de Ω que verifica

  (S1) Si $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ entonces $\Omega \setminus \mathbf{A} \in \mathcal{A}$

  (S2) Si $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots$ es una familia finita o numerable de conjuntos de $\mathcal{A}$ entonces $\cup_n \mathbf{A}_n \in \mathcal{A}$.

- La familia $\mathcal{A}$ se llama *σ-álgebra de sucesos* y sus elementos (subconjuntos de Ω) son los *sucesos*.

Ejemplos de σ-álgebras

- $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset\}$
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ (las partes de Ω)
- $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset, \mathbf{A}, \mathbf{A}^c\}$
- Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2 \ldots\}$ es un conjuntos finito o numerable, utilizaremos siempre $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

Axiomas de la teoría de la probabilidad

Consideremos Ω, una σ–álgebra $\mathcal{A}$. Las tres proposiciones siguientes componen el sistema de axiomas de la la teoría de la probabilidad:

Axioma I. A cada suceso **A** le corresponde un número no negativo $\mathbf{P}(\mathbf{A})$, llamado *probabilidad* del suceso **A**.

Axioma II. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

Axioma III. Si $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots$ es un conjunto finito o numerable de sucesos incompatibles dos a dos, entonces

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_i \mathbf{A}_i\Big) = \sum_i \mathbf{P}(\mathbf{A}_i).$$

Probabilidades finitas

Consideramos un espacio de sucesos elementales finito:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

La σ-álgebra es la de las partes de Ω

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$$

Asignación de probabilidades en dos etapas:

- $\mathbf{P}(\omega_i) = p_i$ $(i = 1, \dots, n)$, donde $p_i \geq 0$, $p_1 + \cdots + p_n = 1$.
- Si tiene por k puntos:

  $$\mathbf{A} = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\},$$

  asignamos

  $$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \sum_{m=1}^{k} \mathbf{P}(\omega_{i_m}),$$

Es el modelo matemático de un experimento con n resultados posibles.

Regla clásica de Laplace

En 1812 P.S. de Laplace definió una fórmula para calcular probabilidades mediante

Casos favorables sobre casos posibles

Veamos que es un caso particular de la probabilidad definida axiomaticamente. Para eso en el modelo anterior tomamos

$$p_1 = p_2 = \cdots = \frac{1}{n}$$

Obtenemos

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{|\mathbf{A}|}{|\Omega|} = \frac{|\mathbf{A}|}{N} = \frac{\text{casos favorables (en } \mathbf{A})}{\text{casos posibles (en } \Omega)}$$

Si el experimento consiste en tirar, por única vez, un dado equilibrado ($n = 6$), tenemos $\Omega = \{1, \dots, 6\}$, y $p_i = 1/6$.

Notación de la probabilidad

La probabilidad es muy anterior a los conjuntos. Por ésto, en probabilidad se utiliza una terminología específica,

Notación	*Término de la teoría de conjuntos*	*Término de la teoría de la probabilidad*
Ω	espacio de elementos	espacio de sucesos elementales
$\emptyset$	conjunto vacío	suceso imposible
$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$	unión de los conjuntos **A** y **B**	suma de los sucesos **A** y **B**
$\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$	intersección de los conjuntos **A** y **B**	producto de los sucesos **A** y **B**
$\mathbf{AB} = \emptyset$	los conjuntos **A** y **B** son disjuntos (no tienen elementos comunes)	los sucesos **A** y **B** son incompatibles
$\mathbf{C} = \mathbf{AB}$	el conjunto **C** es la intersección de los conjuntos **A** y **B**	el suceso **C** consiste en la ocurrencia (simultánea) de ambos sucesos **A** y **B**
$\mathbf{D} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$	el conjunto **D** es la unión de los conjuntos **A** y **B**	el suceso **D** consiste en la ocurrencia de al menos uno de los sucesos **A** ó **B**

$\mathbf{A}_i\mathbf{A}_j = \emptyset$ $(i, j = 1, 2, \ldots;$ $i \neq j)$	los conjuntos $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots$ son disjuntos dos a dos	los sucesos $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots$ son incompatibles dos a dos
$\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i = \Omega$	cada punto del espacio Ω pertenece por lo menos a uno de los conjuntos $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$	alguno de los sucesos $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ ocurre
$\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$	el conjunto $\mathbf{A}$ está contenido en el conjunto $\mathbf{B}$	la ocurrencia del suceso $\mathbf{A}$ implica la ocurrencia del suceso $\mathbf{B}$
$\Omega \setminus \mathbf{A}$	complemento del conjunto $\mathbf{A}$ (designado $\mathbf{A}^c$)	suceso contrario al suceso $\mathbf{A}$ (designado $\bar{\mathbf{A}}$)

Primeras consecuencias de los axiomas

- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad.
- Las letras $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$ (con índices o sin ellos) designan sucesos, es decir, elementos de la σ–álgebra de sucesos $\mathcal{A}$.

Propiedades para un suceso

Propiedad

Para cualquier suceso $\mathbf{A}$ *se tiene* $\mathbf{P}(\bar{\mathbf{A}}) = 1 - \mathbf{P}(\mathbf{A})$.

Demostración.

Por definición de $\bar{\mathbf{A}}$ (suceso contrario al suceso $\mathbf{A}$), tenemos $\bar{\mathbf{A}} = \Omega \setminus \mathbf{A}$. De aquí resulta $\mathbf{A}\bar{\mathbf{A}} = \emptyset$. Como por el axioma II tenemos $\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \bar{\mathbf{A}}) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$, aplicando el axioma III concluímos, que $1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \bar{\mathbf{A}}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\bar{\mathbf{A}})$. $\square$

Propiedad

El suceso imposible tiene probabilidad nula: $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$.

Demostración.

Esta igualdad se obtiene de la propiedad anterior, si consideramos $\mathbf{A} = \Omega$ y aplicamos el axioma II. $\square$

Propiedades para una familia finita de sucesos

Propiedad

Si $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, *entonces* $\mathbf{P}(\mathbf{A}) \leq \mathbf{P}(\mathbf{B})$.

Demostración.

Como $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, tenemos $\mathbf{B} = \mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \setminus \mathbf{A})$. Es claro que $\mathbf{B} \setminus \mathbf{A} = \mathbf{B}\bar{\mathbf{A}}$ es un suceso, además los sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}$ son incompatibles. Por los axiomas III y I tenemos
$\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}) \geq \mathbf{P}(\mathbf{A})$. $\square$

Propiedad

Para cualquier suceso $\mathbf{A}$ *se tiene* $0 \leq \mathbf{P}(\mathbf{A}) \leq 1$.

Demostración.

En virtud del axioma I es suficiente demostrar la segunda desigualdad, la cual se deduce inmediatamente de la propiedad anterior, por la inclusión $\mathbf{A} \subset \Omega$ y el axioma II. $\square$

Propiedad

Para sucesos $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *arbitrarios vale la igualdad*

$$\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B}) - \mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}). \tag{1}$$

Demostración.

Es claro que $\mathbf{A} = \mathbf{AB} \cup \mathbf{A\bar{B}}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{AB} \cup \mathbf{\bar{A}B}$. Como los sucesos en las dos sumas anteriores son incompatibles, por el axioma III, resulta

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \mathbf{P}(\mathbf{AB}) + \mathbf{P}(\mathbf{A\bar{B}}), \qquad \mathbf{P}(\mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{AB}) + \mathbf{P}(\mathbf{\bar{A}B}).$$

Tenemos también $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{AB} \cup \mathbf{A\bar{B}} \cup \mathbf{\bar{A}B}$, donde a la derecha se suman tres sucesos incompatibles dos a dos. Aplicando nuevamente el axioma III y sustituyendo, resulta

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) &= \mathbf{P}(\mathbf{AB}) + \mathbf{P}(\mathbf{A}) - \mathbf{P}(\mathbf{AB}) + \mathbf{P}(\mathbf{B}) - \mathbf{P}(\mathbf{AB}) \\ &= \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B}) - \mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}),\end{aligned}$$

que es la igualdad buscada. □

Observación

Si los sucesos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son incompatibles, entonces $\mathbf{P}(\mathbf{AB}) = 0$, y de la fórmula (1) se obtiene la igualdad ya conocida $\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B})$.

Observación

En forma análoga, no es difícil demostrar, que para tres sucesos $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ arbitrarios, tiene lugar la igualdad

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = {} & \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B}) + \mathbf{P}(\mathbf{C}) \\ & - \mathbf{P}(\mathbf{AB}) - \mathbf{P}(\mathbf{AC}) - \mathbf{P}(\mathbf{BC}) + \mathbf{P}(\mathbf{ABC}).\end{aligned}$$

Observación

Es posible también demostrar una fórmula general: para sucesos arbitrarios $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ vale la igualdad

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\mathbf{A}_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbf{P}(\mathbf{A}_i\mathbf{A}_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} \mathbf{P}(\mathbf{A}_i\mathbf{A}_j\mathbf{A}_k) - \cdots + (-1)^{n+1}\,\mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_n).$$

De aquí es posible obtener la *desigualdad de Bonferroni*:

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i\Big) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\mathbf{A}_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbf{P}(\mathbf{A}_i\mathbf{A}_j).$$

Propiedad

Dados n sucesos $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ *arbitrarios, tiene lugar la desigualdad*

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\mathbf{A}_i).$$

Demostración.

Para $n = 2$ esta desigualdad se obtiene de (1). Para $n > 2$, es fácil obtener el resultado anterior, mediante la aplicación sucesiva de la desigualdad $\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \leq \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B})$. $\square$

Propiedad

Sean $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ sucesos incompatibles dos a dos, y tales que alguno de ellos ocurre[1]*. Entonces $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\mathbf{A}_i) = 1$.*

Demostración.

Tenemos $\mathbf{A}_i\mathbf{A}_j = \emptyset$ cuando $i \neq j$, para $i, j = 1, \ldots, n$. Además $\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i = \Omega$. De los axiomas II y III obtenemos

$$1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\mathbf{A}_i),$$

concluyendo la demostración. $\square$

[1] Recordar la tabla

Continuidad de la probabilidad

Propiedad

Sea $\mathbf{A}_1 \supset \mathbf{A}_2 \supset \mathbf{A}_3 \supset \cdots$ *una sucesión de sucesos, y designemos* $\mathbf{A} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathbf{A}_i$*. Entonces, existe el* $\lim_n \mathbf{P}(\mathbf{A}_n)$*, y es igual a* $\mathbf{P}(\mathbf{A})$*.*

Demostración.

Para cada n, tenemos

$$\mathbf{A}_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} (\mathbf{A}_k \setminus \mathbf{A}_{k+1}) \cup \mathbf{A}.$$

Como los sucesos que aparecen a la derecha son incompatibles dos a dos, utilizando el axioma III, obtenemos

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}(\mathbf{A}_k \setminus \mathbf{A}_{k+1}) + \mathbf{P}(\mathbf{A}). \tag{2}$$

Si aquí tomamos $n = 1$, resulta

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\mathbf{A}_k \setminus \mathbf{A}_{k+1}) \leq \mathbf{P}(\mathbf{A}_1) \leq 1.$$

De la convergencia de la serie a la izquierda en la fórmula anterior, surge que

Demostración.

$$\sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}(\mathbf{A}_k \setminus \mathbf{A}_{k+1}) \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Tomando límite en ambos lados de la igualdad (2), obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\mathbf{A}_n) = \mathbf{P}(\mathbf{A}),$$

concluyendo la demostración. $\square$

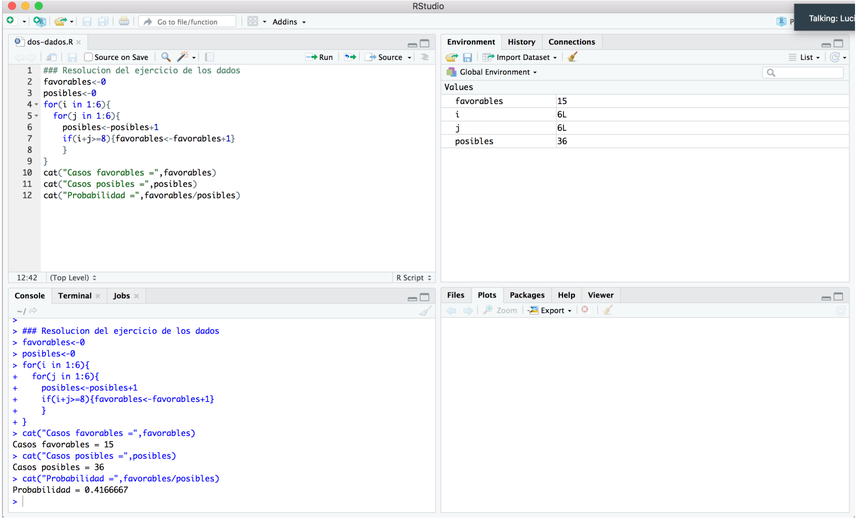
Solución de un ejercicio en R studio

Ejercicio: Calcular la probabilidad de que al tirar un dado dos veces consecutivas, la suma de los puntos obtenidos sea no menor que 8.
Solución: Ω se representa por (i, j), el resultado de tirar un dado dos veces $(i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$:

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)
\end{array}$$

Considerando que los 36 resultados posibles son equiprobables, y aplicando la fórmula de Laplace obtenemos $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = 15/36 = 5/12$.

La pantalla de R Studio



La ventana del código

dos-dados.R

```r
### Resolucion del ejercicio de los dados
favorables<-0
posibles<-0
for(i in 1:6){
  for(j in 1:6){
    posibles<-posibles+1
    if(i+j>=8){favorables<-favorables+1}
    }
}
cat("Casos favorables =",favorables)
cat("Casos posibles =",posibles)
cat("Probabilidad =",favorables/posibles)
```

12:42 (Top Level) R Script

La ventana de los resultados (es igual a la consola del R)

Console Terminal Jobs

~/

```
>
> ### Resolucion del ejercicio de los dados
> favorables<-0
> posibles<-0
> for(i in 1:6){
+   for(j in 1:6){
+     posibles<-posibles+1
+     if(i+j>=8){favorables<-favorables+1}
+     }
+ }
> cat("Casos favorables =",favorables)
Casos favorables = 15
> cat("Casos posibles =",posibles)
Casos posibles = 36
> cat("Probabilidad =",favorables/posibles)
Probabilidad = 0.4166667
> 
```

La ventana de las variables