Probabilidad - Clase 3
Probabilidad condicional, probabilidad total, Bayes, independencia...¿fútbol?

Ernesto Mordecki

Facultad de Ciencias, Universidad de la República. Montevideo, Uruguay

Curso de la Licenciatura en Matemática - 2020


Mi querido Diario Intimo: Hoy me levanté muy contenta,.....
.....por lo que creo que durante el día mi estado de ánimo será bueno......
SNIF SNIF
.....desmejorando hacia el mediodía, con probabilidades de sopa.
424

Contenidos

Repaso: σ-álgebra de sucesos

- Consideramos un conjunto Ω que llamamos *espacio de sucesos elementales*
- Los puntos de este conjunto, denotados $\omega \in \Omega$, se llaman *sucesos elementales*
- Sea $\mathcal{A}$ una familia no vacía de subconjuntos de Ω que verifica

  (S1) Si $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ entonces $\Omega \setminus \mathbf{A} \in \mathcal{A}$

  (S2) Si $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots$ es una familia finita o numerable de conjuntos de $\mathcal{A}$ entonces $\cup_n \mathbf{A}_n \in \mathcal{A}$.
- La familia $\mathcal{A}$ se llama *σ-álgebra de sucesos* y sus elementos (subconjuntos de Ω) son los *sucesos*.

Axiomas de la teoría de la probabilidad

Consideremos Ω, una σ–álgebra $\mathcal{A}$. Las tres proposiciones siguientes componen el sistema de axiomas de la la teoría de la probabilidad:

Axioma I. A cada suceso **A** le corresponde un número no negativo $\mathbf{P}(\mathbf{A})$, llamado *probabilidad* del suceso **A**.

Axioma II. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

Axioma III. Si $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots$ es un conjunto finito o numerable de sucesos incompatibles dos a dos, entonces

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_i \mathbf{A}_i\Big) = \sum_i \mathbf{P}(\mathbf{A}_i).$$

- La terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ se denomina **espacio de probabilidad.**

Probabilidades finitas

Consideramos

- un espacio de sucesos elementales finito: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$
- La σ-álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
- Las probabilidades de los sucesos elementales $\mathbf{P}(\omega_i) = p_i$ $(i = 1, \dots, n)$, con $p_i \geq 0$ y $p_1 + \cdots + p_n = 1$.
- Las probabilidades de un suceso compuesto

$$\mathbf{A} = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\},$$

asignamos

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \sum_{m=1}^{k} \mathbf{P}(\omega_{i_m}),$$

Regla clásica del cálculo de probabilidades (Laplace)

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}, \qquad \mathcal{A} = \mathcal{P}(A).$$

Si $\mathbf{A} = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$, asignamos

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \sum_{m=1}^{k} \mathbf{P}(\omega_{i_m}), \tag{1}$$

en donde

$$\mathbf{P}(\omega_1) = \mathbf{P}(\omega_2) = \cdots = \mathbf{P}(\omega_n) = 1/n.$$

Obtenemos entonces

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{k}{n} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}.$$

La violación de la equiprobabilidad impide la aplicación de la regla de Laplace.

Ejemplo

Una urna contiene a bolas blancas y b bolas negras. Se eligen al azar c bolas, donde $c < a + b$. Calcular la probabilidad de que entre las bolas extraídas haya a_0 bolas blancas y b_0 bolas negras.

Solución

$$a_0 + b_0 = c, \qquad 0 \leq a_0 \leq a, \quad 0 \leq b_0 \leq b.$$

Tenemos $C^{a+b}_{a_0+b_0}$ formas distintas de elegir $a_0 + b_0$ bolas entre las $a + b$ bolas,**consideradas equiprobables.**
La cantidad de formas de elegir a_0 entre las a blancas es $C^{a}_{a_0}$.
Para cada una de esas, existen $C^{b}_{b_0}$ formas elegir b_0 entre las b bolas negras. Los casos favorables son $C^{a}_{a_0} C^{b}_{b_0}$. Entonces

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{\binom{a}{a_0}\binom{b}{b_0}}{\binom{a+b}{a_0+b_0}}.$$

Probabilidad condicional

Consideremos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ y dos sucesos cualesquiera $\mathbf{A}, \mathbf{B}$, con $\mathbf{P}(\mathbf{A}) > 0$. Definimos la *probabilidad condicional* de **B** dado **A**, que designamos $\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A})$, mediante la fórmula

$$\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}) = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{AB})}{\mathbf{P}(\mathbf{A})}. \qquad (2)$$

La probabilidad condicional es una probabilidad

Veamos que la probabilidad condicional así definida (dado el suceso **A** fijo) verifica todos los axiomas de la sección 1.2. Es claro que $\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}) \geq 0$ para cualquier suceso **B**, de forma que el axioma I se verifica. Continuando,

$$\mathbf{P}(\Omega \mid \mathbf{A}) = \frac{\mathbf{P}(\Omega\mathbf{A})}{\mathbf{P}(\mathbf{A})} = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{A})}{\mathbf{P}(\mathbf{A})} = 1,$$

y el axioma II también se verifica.

Veamos el axioma III

Sea $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots$ un conjunto finito o numerable de sucesos incompatibles dos a dos. Tenemos

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_i \mathbf{B}_i \,|\, \mathbf{A}\Big) = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{A}(\bigcup_i \mathbf{B}_i))}{\mathbf{P}(\mathbf{A})} = \frac{\mathbf{P}(\bigcup_i \mathbf{A}\mathbf{B}_i)}{\mathbf{P}(\mathbf{A})} = \frac{\sum_i \mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{B}_i)}{\mathbf{P}(\mathbf{A})}$$
$$= \sum_i \frac{\mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{B}_i)}{\mathbf{P}(\mathbf{A})} = \sum_i \mathbf{P}(\mathbf{B}_i \,|\, \mathbf{A}),$$

y se verifica el axioma III.

En conclusión, si $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ es un espacio de probabilidad, la terna $\big(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}(\,\cdot \,|\, \mathbf{A})\big)$ donde **A** es un suceso con probabilidad positiva, también resulta ser un espacio de probabilidad.

Probabilidad condicional y regla de Laplace

Consideremos ahora el caso particular en el que Ω está compuesto por n puntos, a los cuales se les asignan probabilidades idénticas. De esta forma, es aplicable la regla clásica del cálculo de probabilidades. Para un suceso **C** arbitrario, designamos mediante $n_{\mathbf{C}}$ la cantidad de sucesos elementales que componen **C**. Entonces $\mathbf{P}(\mathbf{C}) = n_{\mathbf{C}}/n$, y para la probabilidad condicional tenemos

$$\mathbf{P}(\mathbf{B} \,|\, \mathbf{A}) = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{AB})}{\mathbf{P}(\mathbf{A})} = \frac{n_{\mathbf{AB}}/n}{n_{\mathbf{A}}/n} = \frac{n_{\mathbf{AB}}}{n_{\mathbf{A}}}.$$

Ejemplo

Un experimento consiste en elegir al azar una carta de un mazo de 52 cartas. El suceso **A** consiste en que la carta elegida sea roja; el suceso **B**, en que sea de corazones. Tenemos $n = 52$, $n_{\mathbf{A}} = 26$, $n_{\mathbf{AB}} = n_{\mathbf{B}} = 13$, y por ésto

$$\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}) = \frac{n_{\mathbf{AB}}}{n_{\mathbf{A}}} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}.$$

Fórmula de la probabilidad total

Teorema

Consideremos sucesos $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ *incompatibles dos a dos, tales que alguno de ellos ocurre, y con probabilidades positivas. Sea* $\mathbf{B}$ *un suceso arbitrario. Entonces*

$$\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\mathbf{A}_i)\,\mathbf{P}(\mathbf{B} \,|\, \mathbf{A}_i). \tag{3}$$

La igualdad (3) *se denomina fórmula de la probabilidad total.*

Demostración.

Escribimos $\mathbf{B} = \Omega\mathbf{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i\mathbf{B}$ donde $\mathbf{A}_1\mathbf{B}, \ldots, \mathbf{A}_n\mathbf{B}$ son incompatibles dos a dos, por ser dos a dos incompatibles los sucesos $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$. Aplicando el axioma III, tenemos

$$\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i\mathbf{B}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\mathbf{A}_i\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\mathbf{A}_i)\,\mathbf{P}(\mathbf{B} \mid \mathbf{A}_i),$$

donde para obtener la última igualdad nos basamos en la definición de probabilidad condicional (2). $\square$

Ejemplo

Tenemos 5 cajones con productos de una cierta industria. Dos cajones contienen cada uno 4 productos buenos y 1 fallado; otros dos cajones contienen cada uno 3 productos buenos y 2 fallados; y el último cajón contiene 6 productos buenos. Se elige al azar un cajón, del cual, también al azar, se extrae un producto. Calcular la probabilidad de que el producto extraído resulte bueno.

Solución

Sea

- **B** suceso consistente en que el producto extraído sea bueno.
- $\mathbf{A}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ suceso consistente en elegir un cajón con una de las composiciones dada.

De esta forma (por ejemplo) se tiene:

- $\mathbf{A}_1$ consiste en elegir un cajón conteniendo 4 productos buenos y 1 fallado;
- $\mathbf{A}_2$ consiste en elegir un cajón conteniendo 3 productos buenos y 2 fallados;
- $\mathbf{A}_3$ consiste en elegir el cajón que contiene 6 productos buenos.

- Es claro que los sucesos $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ y $\mathbf{A}_3$ son incompatibles dos a dos y alguno de ellos ocurre, de modo que según la fórmula de la probabilidad total:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{B}) &= \mathbf{P}(\mathbf{A}_1)\,\mathbf{P}(\mathbf{B}\,|\,\mathbf{A}_1) + \mathbf{P}(\mathbf{A}_2)\,\mathbf{P}(\mathbf{B}\,|\,\mathbf{A}_2) + \mathbf{P}(\mathbf{A}_3)\,\mathbf{P}(\mathbf{B}\,|\,\mathbf{A}_3) \\ &= \frac{2}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{6}{6}=\frac{19}{25}. \end{aligned}$$

Ejemplo

En una cierta población de hombres hay un 30% de fumadores. Se sabe que la probabilidad de enfermarse de cáncer de pulmón es:

- 0,1 para los fumadores,
- 0,01 para los no fumadores.

Calcular la probabilidad de que un hombre elegido al azar en esta población esté enfermo de cáncer de pulmón.

Solución

Designemos

- **B** el suceso que consiste en que el hombre elegido tenga esta enfermedad.
- **A** el suceso que consiste en elegir un fumador de la población.

Sabemos que $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = 0{,}3$, y que $\mathbf{P}(\bar{\mathbf{A}}) = 0{,}7$ (el suceso $\bar{\mathbf{A}}$ consiste en elegir un no fumador de la población). Por la fórmula de la probabilidad total, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A})\,\mathbf{P}(\mathbf{B}\,|\,\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\bar{\mathbf{A}})\,\mathbf{P}(\mathbf{B}\,|\,\bar{\mathbf{A}})& \\ = 0{,}3 \times 0{,}1 + 0{,}7 \times 0{,}01 = 0{,}037.&\end{aligned}$$

Fórmula de Bayes

Teorema

Consideremos sucesos $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ *incompatibles dos a dos, tales que alguno de ellos ocurre, y con probabilidades positivas. Sea* $\mathbf{B}$ *un suceso con probabilidad positiva. Entonces*

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}_k \,|\, \mathbf{B}) = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{A}_k)\,\mathbf{P}(\mathbf{B} \,|\, \mathbf{A}_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\mathbf{A}_i)\,\mathbf{P}(\mathbf{B} \,|\, \mathbf{A}_i)} \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

La igualdad (4) *se denomina fórmula de Bayes.*

Demostración.
Por la definición de probabilidad condicional, tenemos

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}_k\mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}_k)\,\mathbf{P}(\mathbf{B}\,|\,\mathbf{A}_k) = \mathbf{P}(\mathbf{B})\,\mathbf{P}(\mathbf{A}_k\,|\,\mathbf{B}) \quad (k = 1, \dots, n).$$

De aquí obtenemos

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}_k\,|\,\mathbf{B}) = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{A}_k)\,\mathbf{P}(\mathbf{B}\,|\,\mathbf{A}_k)}{\mathbf{P}(\mathbf{B})} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Para obtener (4), resta aplicar la fórmula de la probabilidad total (3) en el denominador. $\square$

Ejemplo

En una primer urna se tienen 9 bolas blancas y 1 negra, en una segunda urna 2 bolas blancas y 8 negras. Se elige al azar una urna, y de ella, también al azar, se extrae una bola. La bola extraída resulta ser blanca (ocurrió el suceso $\mathbf{B}$). Calcular las probabilidades $\mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \,|\, \mathbf{B})$ y $\mathbf{P}(\mathbf{A}_2 \,|\, \mathbf{B})$, donde el suceso $\mathbf{A}_i$ consiste en elegir la urna i ($i = 1$ ó 2).

Solución

Por la fórmula de Bayes, tenemos

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \,|\, \mathbf{B}) = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{A}_1)\,\mathbf{P}(\mathbf{B} \,|\, \mathbf{A}_1)}{\mathbf{P}(\mathbf{A}_1)\,\mathbf{P}(\mathbf{B} \,|\, \mathbf{A}_1) + \mathbf{P}(\mathbf{A}_2)\,\mathbf{P}(\mathbf{B} \,|\, \mathbf{A}_2)}$$

$$= \frac{(1/2)(9/10)}{(1/2)(9/10) + (1/2)(2/10)} = \frac{9}{11}.$$

Análogamente, se obtiene

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}_2 \,|\, \mathbf{B}) = \frac{(1/2)(2/10)}{(1/2)(9/10) + (1/2)(2/10)} = \frac{2}{11}.$$

Alternativamente, una vez obtenida $\mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \,|\, \mathbf{B})$ podemos calcular directamente $\mathbf{P}(\mathbf{A}_2 \,|\, \mathbf{B}) = 1 - \mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \,|\, \mathbf{B})$.

El fútbol está suspendido...pero...¿quién pateó el penal?

En un partido de las eliminatorias, Uruguay debe tirar un penal. Se elige, con equi-probabilidad, quien ejecuta el tiro penal, entre tres jugadores:

- Suárez (92 aciertos de cada 100),
- Cavani (88 aciertos de cada 100),
- un suplente (60 aciertos de cada 100).

(a) Calcular la probabilidad de que el tiro se erre.

(b) Si el tiro penal se erra: ¿Cuál es la probabilidad de que lo haya pateado el suplente?

Solución

Definimos sucesos: **E** errar el penal, $\mathbf{A}_1$ patea Suárez, $\mathbf{A}_2$ patea Cavani, $\mathbf{A}_3$ patea el suplente.

(a) Por la fórmula de Probabilidad total: tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathbf{E}) &= \mathbf{P}(\mathbf{E} \mid \mathbf{A}_1)\,\mathbf{P}(\mathbf{A}_1) + \mathbf{P}(\mathbf{E} \mid \mathbf{A}_2)\,\mathbf{P}(\mathbf{A}_2) + \mathbf{P}(\mathbf{E} \mid \mathbf{A}_3)\,\mathbf{P}(\mathbf{A}_3) \\ &= \frac{8}{100} \times \frac{1}{3} + \frac{12}{100} \times \frac{1}{3} + \frac{40}{100} \times \frac{1}{3} = \frac{60}{100} \times \frac{1}{3} = 0,2.\end{aligned}$$

(b) Aplicando Bayes

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}_3 \mid \mathbf{E}) = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{E} \mid \mathbf{A}_3)\,\mathbf{P}(\mathbf{A}_3)}{\mathbf{P}(\mathbf{E})} = \frac{40/100 \times 1/3}{2/10} = \frac{2}{3}.$$

En este caso, la probabilidad condicional **aumenta** de 1/3 a 2/3.

Figura: ¡ahhh ... fútbol!