Probabilidad - Clase 4
Modelos: Bernoulli, Binomial, Normal
Estadística

Ernesto Mordecki

Facultad de Ciencias, Universidad de la República. Montevideo, Uruguay

Curso de la Licenciatura en Matemática - 2020


DISTRIBUCIÓN
BINOMIAL
EL PAÍS TV

Contenidos

Modelo éxito-fracaso de Bernoulli

- $\Omega = \{\omega_1 \text{ (éxito) }, \omega_2 \text{ (fracaso) }\}$
- Tomamos $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, entonces

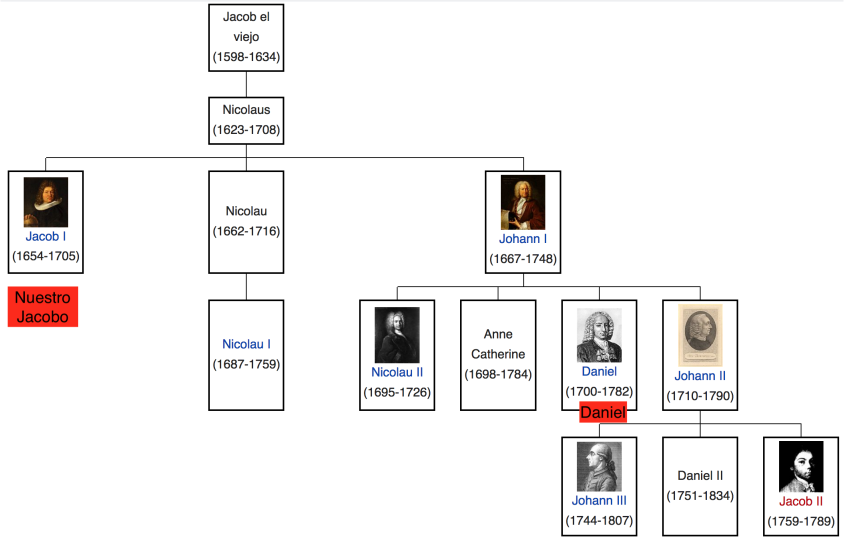
$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_1, \omega_2\} = \Omega\}.$$

- Definimos

$$\mathbf{P}(\emptyset) = 0, \quad \mathbf{P}(\{\omega_1\}) = p, \quad \mathbf{P}(\{\omega_2\}) = q, \quad \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

donde p y q son positivos y verifican $p + q = 1$.

Jacobo Bernoulli



Dos experimentos

- Consideremos ahora

$$\Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_1), (\omega_1, \omega_2), (\omega_2, \omega_1), (\omega_2, \omega_2)\}.$$

  Describe los resultados posibles de dos experimentos, que concluyen solamente con éxito ω_1, o fracaso ω_2.

- Por ejemplo, el punto (ω_1, ω_2) corresponde a la ocurrencia de un éxito en el primer experimento, y un fracaso en el segundo.

- $\mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(\Omega_2)$.
- Introducimos **P** asignándo

  $$\mathbf{P}(\omega_1, \omega_1) = p^2, \quad \mathbf{P}(\omega_1, \omega_2) = \mathbf{P}(\omega_2, \omega_1), = pq, \quad \mathbf{P}(\omega_2, \omega_2) = q^2.$$

- La suma de estas cuatro probabilidades es $p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2 = 1$.
- El espacio de probabilidad $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mathbf{P})$, se llama *serie de dos experimentos independientes*.

¿Por qué se llaman *independientes*?

Consideremos

- **A** consiste en la ocurrencia de un éxito en el primer experimento;
- **B** consiste en la ocurrencia de un éxito en el segundo.

De esta forma

$$\mathbf{A} = \{(\omega_1, \omega_1), (\omega_1, \omega_2)\}, \quad \mathbf{B} = \{(\omega_1, \omega_1), (\omega_2, \omega_1)\}.$$

Veamos que los sucesos **A** y **B** son independientes.

En efecto, tenemos

- $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = p^2 + pq = p(p+q) = p$,
- $\mathbf{P}(\mathbf{B}) = p^2 + pq = p$.
- Como $\mathbf{AB} = \{(\omega_1, \omega_1)\}$, resulta que $\mathbf{P}(\mathbf{AB}) = p^2 = \mathbf{P}(\mathbf{A})\,\mathbf{P}(\mathbf{B})$,
- Se verifica la definición de sucesos independientes.
- Se puede probar que también son independientes los sucesos $\mathbf{A}$ y $\bar{\mathbf{B}}$, $\bar{\mathbf{A}}$ y $\mathbf{B}$, $\bar{\mathbf{A}}$ y $\bar{\mathbf{B}}$.
- De esta forma, en una serie de dos experimentos independientes, los resultados correspondientes a cada uno de los experimentos son sucesos independientes.

n experimentos independientes

- Consideremos
$$\Omega_n = \{\omega = (\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n)}) : \text{cada } \omega^{(i)} \text{ es éxito } \omega_1, \text{ o fracaso } \omega_2 \ (i = 1, \dots, n).\}$$

- Ω_n describe los resultados posibles de n experimentos, que concluyen en éxito ω_1, o fracaso ω_2.

- Consideramos
$$\mathcal{A}_n = \mathcal{P}(\Omega_n).$$

Asignación de probabilidades

- Dado $\mathbf{A} \in \mathcal{A}_n$, le asignamos una probabilidad igual a la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen.
- la probabilidad de cada suceso elemental Ω_n se define:
  - si $\omega = (\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n)})$ tiene m éxitos ω_1 y $n - m$ fracasos ω_2, le asignamos
  $$\mathbf{P}(\omega) = p^m q^{n-m}.$$
- $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathbf{P})$, se denomina *serie de n experimentos independientes* o **Esquema de Bernoulli**

Notación

- Designemos mediante $\mu(\omega)$ la cantidad de éxitos (componentes iguales a ω_1) en ω
- Entonces
$$0 \leq \mu(\omega) \leq m.$$
- Introduzcamos la notación
$$P_n(m) = \mathbf{P}(\{\omega \colon \mu(\omega) = m\}) = \mathbf{P}(\mu = m),$$
para $m = 0, 1, \dots, n$.
- En palabras, $P_n(m)$ es la probabilidad de que ocurran m éxitos en n experimentos independientes.

Distribución binomial

Proposición

Tiene lugar la igualdad

$$P_n(m) = \binom{n}{m} p^m q^{n-m}, \qquad (m = 0, 1, \ldots, n). \tag{1}$$

donde $\binom{n}{m}$ *son las combinaciones de* n *tomadas de a* n*.*

Demostración.

- Queremos calcular la probabilidad de que, al realizar n experimentos, ocurran exactamente m éxitos.
- De acuerdo con nuestra definición, dicha probabilidad es la suma de las probabilidades de los puntos ω que componen el suceso $\{\omega\colon \mu(\omega) = m\}$.
- Un punto perteneciente a este suceso es, por ejemplo,

$$\omega = (\underbrace{\omega_1, \dots, \omega_1}_{m}, \underbrace{\omega_2, \dots, \omega_2}_{n-m}),$$

que corresponde a la ocurrencia de éxitos en los m primeros experimentos, y fracasos en los $n - m$ restantes.
- Este punto tiene una probabilidad igual a $p^m q^{n-m}$.

- Más aún, todos los puntos con exactamente m éxitos tienen asignada esta misma probabilidad, dado que las probabilidades de los sucesos elementales no dependen del lugar en la serie que ocupan los experimentos en que ocurren los éxitos,
- Resta entonces saber, **cuantos son los puntos** que componen el suceso $\{\omega \colon \mu(\omega) = m\}$.
- Esta cantidad es igual a la cantidad de formas de distribuir m objetos (los éxitos ω_1) en n lugares (las n componentes del punto ω), siendo por ésto igual a $\binom{n}{m}$.
- En conclusión, se obtiene $P_n(m) = \binom{n}{m} p^m q^{n-m}$, concluyendo la demostración. $\square$

Observación

Tenemos

$$\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} p^m q^{n-m} = (q+p)^n = 1.$$

Esta igualdad muestra que la asignación de probabilidades es correcta (es decir, se verifican los axiomas de la sección 1.2).

Observación

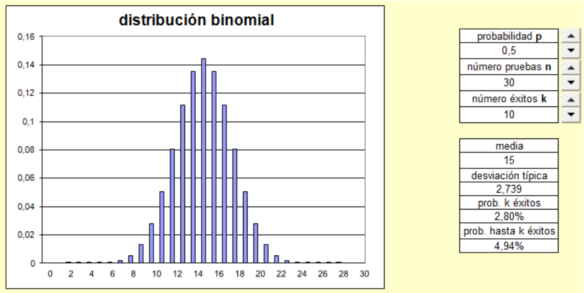
Decimos que la fórmula

$$P_n(m) = \binom{n}{m} p^m q^{n-m}, \qquad (m = 0, 1, \ldots, n)$$

es la *distribución de probabilidades binomiales*.

Escrito en el año 1713 (en idioma latín)


ARTIS CONJECTANDI
PARS PRIMA,
Complectens
Tractatum Hugenii de Ratiociniis
in Ludo Aleæ,
Cum Annotationibus
JACOBI BERNOULLI.
CHRIST. HUGENII
ad
FRANC. SCHOOTENIUM
Præfatio.
Um in editione elegantissimorum ingenii Tui monumentorum, quam præ manibus nunc habes, Vir Clarissime, id inter cœtera Te spectare sciam, ut varietate rerum, quarum tractationem instituisti, ostendas quàm latè se protendat divina Analytices scientia, facilè intelligo etiam illa plurimùm proposito Tuo inservire posse, quæ de Aleæ Ratiociniis
A con-



Algunas consecuencias:

- La probabilidad de que ocurran n éxitos en n experimentos independientes es igual a p^n;
- la de que ocurran n fracasos, igual a q^n.
- Son los casos $m = n$ y $m = 0$ respectivamente.
- La probabilidad de que ocurra por lo menos un éxito en n experimentos independientes es $1 - q^n$, como resulta de aplicar la propiedad $\mathbf{P}(\bar{\mathbf{A}}) = 1 - \mathbf{P}(\mathbf{A})$.

Ejemplo

Calcular la probabilidad de que en 5 tiradas consecutivas de una moneda, aparezca cara: (a) 5 veces; (b) ni una vez; (c) por lo menos una vez.

Solución

- Las 5 tiradas consecutivas son una serie de 5 experimentos independientes,
- Suponiendo que la probabilidad de obtener una cara (éxito) es igual a $1/2$, obtenemos:
  - (a) $P_5(5) = (1/2)^5 = 1/32$;
  - (b) $P_5(0) = (1 - 1/2)^5 = 1/32$.
  - (c) Por lo anterior, la probabilidad de que aparezca cara por lo menos una vez, es $1 - 1/32 = 31/32$.

Ejemplo

Se realiza una serie de tres disparos, con una probabilidad de acertar en el blanco igual a $1/3$. Calcular la probabilidad de que:

(a) dos veces se acierte en el blanco;

(b) por lo menos una vez se acierte en el blanco.

Solución

Con $p = 1/3$, tenemos:

(a) $P_3(2) = \binom{3}{2}(1/3)^2(1-1/3)^{3-2} = 2/9$.

(b) $1 - P_3(0) = 1 - (1-1/3)^3 = 1 - 8/27 = 19/27$.

Ejemplo

En determinadas condiciones de producción, la probabilidad de que un cierto artículo resulte defectuoso es igual a 0,02. Calcular la probabilidad de que en 10000 artículos elegidos al azar, resulten:

(a) 230 defectuosos;

(b) a lo sumo 230 defectuosos.

Tenemos una serie de $n = 10000$ experimentos independientes, con probabilidad de éxito (artículo resulte defectuoso) $p = 0{,}02$. Entonces

(a) $P_{10000}(230) = \binom{10000}{230}(0{,}02)^{230}(0{,}98)^{9770}$,

(b) El suceso es $\{\omega\colon \mu(\omega) \leq 230\}$. Sumamos las probabilidades de los sucesos

$$\{\omega\colon \mu(\omega) = m\} \ (m = 0, \dots, 230).$$

(incompatibles dos a dos)

$$\mathbf{P}(\mu \leq 230) = \sum_{m=0}^{230} \binom{10000}{m}(0{,}02)^{m}(0{,}98)^{10000-m}.$$

- Las expresiones que hemos obtenido en el ejercicio anterior, sin lugar a duda, son difíciles de calcular numéricamente.

```
> choose(10000,230)
[1] Inf
```

- Esto muestra la importancia de conocer fórmulas que **aproximen** a estas cantidades, y permitan hacer los cálculos hasta el final.
- Estas fórmulas aproximadas son las proporcionadas por los teoremas límites de De Moivre–Laplace,

Sobre los teoremas límites en probabilidad

In the formal construction of a course in the theory of probability, limit theorems appear as a kind of superstructure over elementary chapters, in which all problems have finite, purely arithmetical character. In reality, however, the epistemological value of the theory of probability is revealed only by limit theorems. Moreover, without limit theorems it is impossible to understand the real content of the primary concept of all our sciences — the concept of probability. In fact, all epistemologic value of the theory of probability is based on this: that large-scale random phenomena in their collective action create strict, nonrandom regularity. The very concept of mathematical *probability* would be fruitless if it did not find its realization in the *frequency* of occurrence of events under large-scale repetition of uniform conditions (a realization which is always approximate and not wholly reliable, but which becomes, in principle, arbitrarily precise and reliable as the number of repetitions increases).

Figura: Del prefacio del libro “Distribuciones límites para sumas de variables independientes” de 1949 de B. Gnedenko y A. Kolmogorov.

Traducción

- En la construcción formal de un curso de teoría de la probabilidad, los teoremas límites aparecen como una especie de super-estructura sobre los capítulos elementales en los que todos los problemas tiene un carácter finito, puramente aritmético.
- En realidad, sin emabrgo, el valor epistemológico de la teoría de la probabildad se revela únicamente mediante los teoremas límites. Más aún, sin teoremas límites es imposible comprender el contenido real del concepto primario de todas nuestras ciencias – el concepto de probabilidad.

- De hecho, todo el valor epistemológico de la teoría de la probabilidad se base en esto: los fenómenos aleatorios en escalas largas en su acción colectiva producen una regularidad no aleatoria, estrictamente.
- El concepto mismo de probabilidad matemática sería infructuoso si no encontrara su realización en la frecuencia de ocurrencia de sucesos bajo repeticiones de larga escala en condiciones uniformes (una realización que es siempre aproximada y no completamente confiable, pero que se convierte, en principio, arbitrariamente precisa y confiable cuando el número de repeticiones aumenta.

Densidad y distribución Normal o de Gauss

Figura: Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Se define la *densidad normal* con parámetros (a, σ), donde a y $\sigma > 0$ son números reales, mediante la fórmula

$$\boxed{p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}} \tag{2}$$

Se demuestra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} dx = 1 \text{ para } x \text{ real.} \tag{3}$$

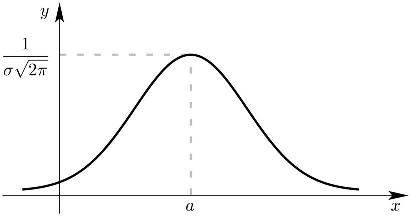
con el cambio de variable $u = (x-a)/\sigma$ la identidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}.$$

Ojo: $\int e^{-u^2} du$ no tiene primitiva elemental.

Propiedades

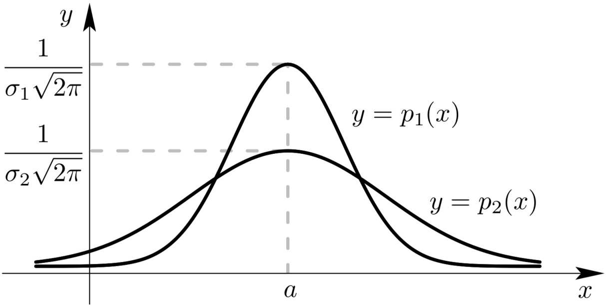
- $p(x)$ tiene un único máximo en el punto $x = a$ (en donde $p'(x) = 0$) y $p(a) = 1/(\sigma\sqrt{2\pi})$;
- se verifica $p(x) \neq 0$ para todo x real,
- $\lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} p(x) = 0$.
- La recta $x = a$ es eje de simetría de la curva $y = p(x)$.
- Derivando, se ve que en $x = a \pm \sigma$, presenta puntos de inflexión.



Observaciones

- Si variamos *a* con σ constante, el gráfico se traslada sin cambiar de forma.

- Con *a* y $\sigma_1 < \sigma_2$, los gráficos respectivos presentan máximo en el mismo punto $x = a$, con valores máximos diferentes $1/(\sigma_1\sqrt{2\pi}) > 1/(\sigma_2\sqrt{2\pi})$. Teniendo en cuenta, que el área bajo cada uno de los gráficos de las densidades $p_1(x)$ y $p_2(x)$ es igual a 1:



Cálculo de probabilidades

Como el área total bajo la campana es uno, $p(x)$ se usa para calcular probabilidades de un experimento de resultado X que es un número real (es decir, $\Omega = \mathbb{R}$):

$$\mathbf{P}(a < X \leq b) = \int_a^b p(x)dx.$$

En particular

$$\mathbf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^b p(x)dx.$$

y

$$\mathbf{P}(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1.$$

Este es nuestro segundo modelo con resultados Ω no numerable. X se llama *variable aleatoria* normal o gaussiana.

Distribución de Gauss

La función $F(x)$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(t-a)^2/2\sigma^2} dt,$$

se llama *distribución normal* con parámetros (a, σ).

Distribución normal estándar

Si $a = 0$ y $\sigma = 1$ obtenemos la *distribución normal estándar*. La densidad es

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \tag{4}$$

Se designa

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

Las funciones $\varphi(x)$ y $\Phi(x)$, relacionadas por la igualdad $\Phi'(x) = \varphi(x)$ están tabuladas.

Estandartización

Estandartización es el pasaje de una normal (a, σ) a una estándar.
Las fórmulas son

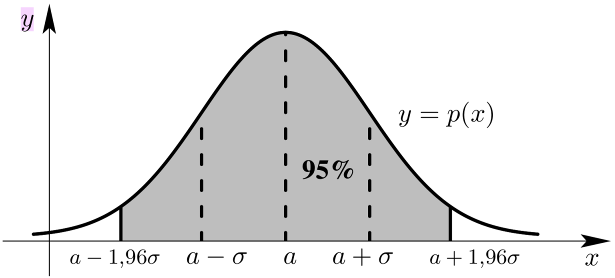
$$F(x) = \Phi\Big(\frac{x-a}{\sigma}\Big), \qquad p(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\Big(\frac{x-a}{\sigma}\Big), \tag{5}$$

válidas para todo x real.

Casos particulares importantes

Dada una distribución normal con parámetros (a, σ), se tienen las siguientes probabilidades, que aparecen usualmente en aplicaciones estadísticas:

$$\mathbf{P}(a - \sigma \leq X \leq a + \sigma) = 0{,}68$$
$$\mathbf{P}(a - 1{,}96\sigma \leq X \leq a + 1{,}96\sigma) = 0{,}95$$
$$\mathbf{P}(a - 3\sigma \leq X \leq a + 3\sigma) = 0{,}997$$




CREO QUE ESTOY EN ESA EDAD DE HACERME PREGUNTAS IMPORTANTES...
...DE REFLEXIONAR SOBRE TODO LO VIVIDO Y HACER PLANES PARA EL FUTURO...
...PERO DESPUÉS VUELVE EL WIFI Y SE ME PASA
CHAPARRONES