1. Se tira una moneda 6 veces consecutivas. Calcular la probabilidad de que aparezca cara:

(a) por lo menos una vez;

(b) no menos de dos veces;

(c) de 3 a 5 veces.

2. Calcular la probabilidad de obtener tres veces 6 puntos, al tirar un dado 5 veces.

3. En un proceso industrial, la probabilidad de que un cierto artículo resulte defectuoso es 0,01. Calcular la probabilidad de que, en 10 artículos elegidos al azar, resulten:

(a) por lo menos un defectuoso;

(b) no menos de dos defectuosos.

4. En la trasmisión de un mensaje compuesto por signos, la probabilidad de que ocurra un error en un signo es 0,1. Calcular la probabilidad de que, en un mensaje con 4 signos:

(a) no hayan errores;

(b) ocurra un error;

(c) ocurra no menos de un error.

5. Calcular la probabilidad de que, en $2n$ experimentos en un esquema de Bernoulli, se obtengan éxitos únicamente en los n experimentos con número par, si la probabilidad de éxito en un experimento es p.

6. Un trabajador controla 5 máquinas de un mismo tipo. La probabilidad de que una máquina requiera la atención del trabajador en el lapso de una hora es 1/3. Calcular la probabilidad de que, en el curso de una hora, el trabajador sea requerido por:

(a) 2 máquinas;

(b) no menos de 2 máquinas.

7. Un matemático lleva consigo dos cajas de fósforos. Al principio en cada caja hay n fósforos. Cada vez que el matemático precisa un fósforo, elige al azar una de las cajas. Calcular la probabilidad de que, cuando el matemático encuentre una caja vacía, en la otra hayan exactamente r fósforos ($0 < r \leq n$).

8. En una habitación hay tres lámparas. La probabilidad de que cada una de estas lámparas no se queme, en el lapso de un año, es 0,8. Calcular la probabilidad de que, en el curso de un año, estén funcionando:

(a) 2 lámparas;

(b) por lo menos una lámpara.

9. La probabilidad de éxito en un esquema de Bernoulli es p. Calcular la probabilidad de que, en el experimento que ocupa el k-ésimo lugar, ocurra éxito por ℓ-ésima vez ($0 < \ell \leq k \leq n$).

10. Una partícula que fluctúa por los puntos enteros de la recta real, en un cierto momento (momento de salto) se traslada una unidad a la izquierda con probabilidad $1/2$, o una unidad a la derecha con probabilidad $1/2$ (independientemente de la dirección de los movimientos anteriores). Este esquema se denomina *paseo al azar simple*. Calcular la probabilidad de que, luego de $2n$ saltos, la partícula se encuentre en el punto desde el cual comenzó a trasladarse.

11. Se tira una moneda 1600 veces. Calcular aproximadamente, la probabilidad de que se obtenga cara:

(a) exactamente 780 veces;

(b) de 780 a 820 veces.

12. La probabilidad de acertar en un blanco es 0,8. Calcular aproximadamente, la probabilidad de que en 400 disparos, se obtengan:

(a) exactamente 300 aciertos;

(b) no menos de 300 aciertos.

13. En determinadas condiciones de producción de un cierto artículo, la probabilidad de que resulte defectuoso es 0,01. Calcular la probabilidad de que, entre 10000 artículos examinados de esta producción, resulten:

(a) de 80 a 110 defectuosos;

(b) no menos de 9950 artículos sin defectos.

14. En una compañía de seguros hay asegurados 50.000 personas, de una cierta edad y grupo social. La probabilidad de defunción en el curso de un año, para cada individuo, es 0,006. Cada persona asegurada paga, al inicio del año, 40 dólares, y en caso de fallecer, sus parientes reciben de la compañía 5000 dólares. Calcular la probabilidad de que, en el lapso de un año, dicha compañía:

(a) sufra pérdidas;

(b) obtenga ganancias de por lo menos 300.000 dólares;

(c) obtenga ganancias de por lo menos 800.000 dólares.

15. Demostrar que para $n = 10{,}000$ nacimientos, la probabilidad de que el desvío del valor esperado de varones (que es 5000) sea a lo sumo un $10\,\%$ (es decir, a lo sumo 100) es mayor que $0,99$.

16. Calcular la probabilidad de que, en una serie de 1000 tiradas de una moneda, la frecuencia de aparición de cara se diferencie de la probabilidad de aparición de cara, en no más de 0,03.

17. La probabilidad de éxito en un esquema de Bernoulli es 0,005. Calcular la probabilidad de que, en una serie de 800 experimentos, ocurra por lo menos un éxito. (Sugerencia: utilizar la aproximación de Poisson a la distribución binomial.)

18. La probabilidad de acertar en un blanco es de 0,001. Calcular la probabilidad de acertar en el blanco dos o mas veces, en una serie de 5000 disparos. (Sugerencia: utilizar la aproximación de Poisson a la distribución binomial.)

19. *La mala suerte no es verdad: el modelo geométrico.* Dada una serie de experimentos de Bernoulli, con probabilidad de éxito p, contamos el número de experimentos necesarios hasta obtener un primer éxito. Tenemos entonces un experimento aleatorio con $\Omega = \{1, 2, \dots\}$. Llamemos T al momento en el cual se obtiene el primer éxito.

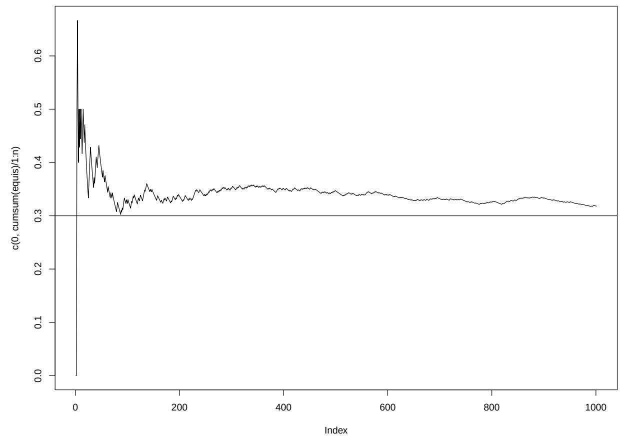

Figura 1: Estabilidad asintótica de las frecuencias

(a) Calcular $\mathbf{P}(T = k)$ para $k = 1, 2, \dots$.

(b) Demostrar que $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(T = k) = 1$. Esto demuestra que la probabilidad está bien definida[1]

(c) *Pérdida de memoria* Sea el suceso $\mathbf{A}$ consistente en que no tuvimos ningún éxito en los primeros N experimentos. Es decir

$$\mathbf{A} = \{T \geq n\}.$$

Demostrar que la probabilidad condicional a $\mathbf{A}$ coincide con la probabilidad inicial. Es decir, si en el paso n no tuvimos éxito, es como que empezáramos nuevamente.

20. `Estabilidad de las frecuencias. Mediante simulación comprobar el Teorema de Bernoulli. Para eso se requiere simular una serie de` n `variables aleatorias de Bernoulli, calcular las frecuencias sucesivas de éxito y graficarlas como función de` n`. Debe obtenerse un gráfico como el de la Figura 1`

[1] Y demuestra también que la mala suerte no es verdad, porque en algún momento, si persistimos experimentando, vamos a tener éxito.