Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2020

Práctico 2

En los siguientes ejercicios todos los espacios son de dimensión finita.

1. Probar que $A \in M_n(\mathbb{k})$ es diagonalizable si y solo si lo es su traspuesta A^t.

2. Sean $T \in \mathcal{L}(V)$ y $v \in V$ un vector propio de T correspondiente a un valor propio λ. Para cada entero positivo m, probar que v es un vector propio de T^m correspondiente[1] al valor propio λ^m.

3. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Probar.
   a) El operador T es invertible si y solo si 0 no es valor propio de T
   b) Si T es invertible, entonces λ es un valor propio de T si y solo si λ^{-1} es un valor propio de T^{-1}.
   c) Si $T \in \mathcal{L}(V)$ es invertible, probar que T es diagonalizable si y solo si lo es T^{-1}.

4. Sea $A \in M_n(\mathbb{k})$ con polinomio característico $\chi_A(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$.
   a) Probar $a_0 = \det(A)$. Deducir que A es invertible si y solo si $a_0 \neq 0$.
   b) Vale $a_{n-1} = (-1)^{n-1}\operatorname{tr}(A)$, donde $\operatorname{tr}(A)$ es la traza de A. Probarlo para $n = 2$ y $n = 3$. *Nota.* La prueba general se puede hacer por inducción en n, desarrollando $\chi_A(t)$ a partir de la primera fila.

5. Probar que los valores propios de una matriz triangular superior son las entradas de su diagonal principal.

6. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{k})$ matrices semejantes. Probar que A y B tienen el mismo polinomio característico. Deducir que A y B tienen los mismos valores propios. Si es $A = PBP^{-1}$ ¿qué relación hay entre los vectores propios de A y los de B?

7. Sea $A \in M_n(\mathbb{k})$. Probar que A y A^t tienen el mismo polinomio característico. Concluir que A y A^t tienen los mismos valores propios, ¿tienen también los mismos vectores propios?

8. Una matriz *escalar* es una matriz diagonal en la cual todas sus entradas diagonales son iguales.
   a) Probar que si una matriz A es semejante a una matriz escalar E, entonces $A = E$.
   b) Probar que si una matriz diagonalizable tiene un solo valor propio, entonces es una matriz escalar.
   c) Deducir que la matriz $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ no es diagonalizable.

9. Se consideran las siguientes matrices $A \in M_n(\mathbb{k})$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbb{k} = \mathbb{R}; \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix},\ \mathbb{k} = \mathbb{R}; \qquad A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & -i \end{pmatrix},\ \mathbb{k} = \mathbb{C}.$$

   Para cada matriz A se pide.
   a) Hallar los valores propios y los subespacios propios correspondientes.
   b) Probar que A es diagonalizable.

[1] Recordar $T^m := T \circ \cdots \circ T$, m veces.

c) Hallar una matriz diagonal D y una matriz invertible Q tales que $A = QDQ^{-1}$.

10. Sea $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Probar que A no es diagonalizable en $\mathbb{R}$ pero sí lo es en $\mathbb{C}$. Hallar una matriz $Q \in M_2(\mathbb{C})$ tal que $Q^{-1}AQ$ es una matriz diagonal.

11. En los siguientes casos determinar si la matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable; si lo es hallar una matriz invertible Q y una matriz diagonal D tales que $A = QDQ^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. En los siguientes casos determinar si $T \in \mathcal{L}(V)$ es diagonalizable y si lo es hallar una base $\mathcal{B}$ de V tal que la matriz $[T]_B$ es diagonal.

    a) $V = \mathbb{R}_2[x],\ T\left(ax^2 + bx + c\right) = cx^2 + bx + a.$
    b) $V = \mathbb{R}_2[x],\ T\big(p(x)\big) = p(0) + p(1)\left(x + x^2\right).$
    c) $V = \mathbb{C}^2,\ T(z, w) = (z + iw, iz + w).$
    d) $V = \mathbb{R}_3[x],\ T\big(p(x)\big) = p'(x) + p''(x).$
    e) $V = M_2(\mathbb{R}),\ T(A) = A^t.$

13. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando o dando un contraejemplo, respectivamente.

    a) Todo operador lineal en un espacio vectorial de dimensión n tiene n valores propios distintos.
    b) Si una matriz real tiene un vector propio entonces tiene un número infinito de vectores propios.
    c) Existe una matriz que no tiene vectores propios.
    d) Los valores propios son escalares no nulos.
    e) Dos vectores propios cualesquiera son linealmente independientes.
    f) La suma de dos valores propios de un operador T es también un valor propio de T.
    g) Una matriz $A \in M_n(\mathbb{k})$ es semejante a una matriz diagonal si y solo si existe una base de $\mathbb{k}^n$ formada por vectores propios de A.
    h) Matrices semejantes tienen siempre los mismos valores propios.
    i) Matrices semejantes tienen siempre los mismos vectores propios.
    j) La suma de dos vectores propios de un operador T es también un vector propio de T.
    k) Si la cantidad de valores propios de T es estrictamente menor que la dimensión de V, entonces T no es diagonalizable.
    l) Dos vectores propios de T correspondientes a un mismo valor propio son linealmente dependientes.
    m) Si T es diagonalizable, entonces T tiene al menos un valor propio.
    n) Si λ_1 y λ_2 son valores propios diferentes de T, entonces $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$.
    ñ) Un operador T es diagonalizable si y sólo si la multiplicidad algebraica de cada uno de sus valores propios λ es igual a la dimensión del subespacio propio E_λ.