Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2020

Práctico 3

En los siguientes ejercicios todos los espacios son de dimensión finita.

1. Sea $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ la función que asigna a una matriz su traspuesta, $T(A) = A^t$.

   a) Probar que T es lineal y que sus únicos valores propios son 1 y -1.

   b) Hallar los subespacios de vectores propios correspondientes a 1 y -1.

   c) ¿Existe una base de $M_n(\mathbb{R})$ cuyos elementos sean vectores propios de T?

2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, calcular A^n para cualquier n entero positivo. *Sugerencia*: escribir $A = QDQ^{-1}$, donde D es diagonal.

3. Un operador T se dice *nilpotente* si existe algún $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $T^n = 0$.

   a) Probar que si un operador T es nilpotente y λ es un valor propio de T, entonces $\lambda = 0$.

   b) Probar que si un operador T es diagonalizable y nilpotente, entonces $T = 0$.

4. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador diagonalizable. Probar que T es una proyección si y solo si todo valor propio de T es 0 o 1.

5. La sucesión de *Fibonacci* se define por recurrencia mediante

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \ \forall n = 2, 3, \dots .$$

   a) Encontrar una matriz A tal que $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$, $\forall n$.

   b) Dar una fórmula explícita para a_n.

6. Sean $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador diagonalizable y $W \neq \{0\}$ un subespacio T-*invariante* de V, es decir un subespacio que verifica $T(W) \subset W$. Notar que la restricción $T|_W : W \to W$ es un operador en W.

   a) Sean $v_1, \dots, v_k$ vectores propios de T correspondientes a valores propios distintos. Probar por inducción en k que si $v_1 + \cdots + v_k \in W$, entonces $v_i \in W$ para todo i.

   b) Probar que $T|_W$ es diagonalizable.

7. Sean $T, S \in \mathcal{L}(V)$. Se dice que T y S son *simultáneamente diagonalizables* si existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $[T]_\mathcal{B}$ y $[S]_\mathcal{B}$ son diagonales. Probar.

   a) Si T y S son simultáneamente diagonalizables, entonces T y S conmutan, es decir $T \circ S = S \circ T$.

   b) Si T y S son diagonalizables y conmutan, entonces T y S son simultáneamente diagonalizables. *Sugerencia*: mostrar que para todo valor propio λ de T el subespacio propio $E_{\lambda,T}$ es S-invariante y aplicar el ejercicio anterior para obtener una base de $E_{\lambda,T}$ formada por vectores propios de S.