**Universidad de la República**
**Facultad de Ciencias**
**Centro de Matemática**

**Álgebra Lineal II**
**Segundo semestre 2020**

# Práctico 4

1. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando o dando un contraejemplo, respectivamente.

   *a*) Un producto interno es lineal en ambas componentes.

   *b*) Hay un único producto interno sobre $\mathbb{R}^n$.

   *c*) La desigualdad triangular solo vale en espacios de dimensión finita.

   *d*) Todo conjunto ortonormal es LI

2. Sean $u = (2, 1+i, i),\ v = (2-i, 2, 1+2i) \in \mathbb{C}^3$, con el producto interno habitual. Calcular $\langle u, v\rangle$, $\|u\|$ y $\|v\|$ y verificar que se cumplen la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad triangular.

3. Probar que $\langle x, y\rangle = xAy^*$ define un producto interno en $\mathbb{C}^2$, donde $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{smallmatrix}\right)$ y $x, y \in \mathbb{C}^2 = M_{1\times 2}(\mathbb{C})$. Calcular $\langle (1-i, 2+3i), (2+i, 3-2i)\rangle$.

4. Sea $V$ un espacio vectorial con producto interno sobre $\mathbb{k}$.

   *a*) Probar la *regla del paralelogramo*: $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right), \quad \forall u, v \in V$.

   *b*) Probar las *fórmulas de polarización*:

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right),\ \mathbb{k} = \mathbb{R}; \quad \langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{k=3} i^k \left\|u + i^k v\right\|^2, \quad \mathbb{k} = \mathbb{C}; \quad \forall u, v \in V.$$

5. En los siguientes casos, hallar una base ortonormal $\mathcal{B}$ de $V$ aplicando el método de Gram-Schmidt al conjunto $S$ dado y calcular los coeficientes de Fourier con respecto a la base $\mathcal{B}$ del vector $v$ dado.

   *a*) $V = \mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual, $S = \{(1,0,1), (0,1,1), (1,3,3)\}$, $v = (1,1,2)$.

   *b*) $V = \mathbb{C}^2$ con el producto interno definido en el ejercicio 3, $S = \{(1,0), (0,1)\}$, $v = (i, -1)$.

   *c*) $V$ es el subespacio de $\mathbb{C}^3$ generado por $S = \{(1, i, 0), (1-i, 2, 4i)\}$, con el producto interno habitual en $\mathbb{C}^3$, $v = (3+i, 4i, -4)$.

6. Sea $V = \mathbb{R}_2[x]$.

   *a*) Probar que $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p\, q$ define un producto interno en $V$.

   *b*) Hallar una base ortonormal de $V$.

7. Se define $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante $\langle (x,y), (x', y')\rangle = 2\,x\,x' + y\,x' + x\,y' + y\,y'$.

   *a*) Probar que $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

   *b*) Hallar una base de $\mathbb{R}^2$ que sea ortonormal respecto a este producto interno.

8. Sea $V$ un espacio vectorial real o complejo de dimensión finita y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base cualquiera de $V$. Definimos $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{k}$ por $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ si $v = \sum_{i=1}^n x_i\, v_i$ y $w = \sum_{i=1}^n y_i\, v_i$. Probar que $\langle\ ,\ \rangle$ define un producto interno en $V$ y que $\mathcal{B}$ es una base ortonormal respecto a $\langle\ ,\ \rangle$.

9. Hallar explícitamente un producto interno en $\mathbb{R}^2$ para el cual $\{(2,3), (1,2)\}$ es una base ortonormal.