Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2018

Prueba 1

1. (**8 puntos**)
Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ definida por $T\big(p(x)\big) = p'(x)$ (la derivada), para todo $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$.

    a) Probar que 0 es el único valor propio de T.

    b) Probar que T no es diagonalizable.

2. (**10 puntos**)
Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

    a) Probar que A es diagonalizable.

    b) Hallar una matriz invertible $P \in M_3(\mathbb{R})$ y una matriz diagonal $D \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $A = PDP^{-1}$.

3. (**7 puntos**)
Sea V un espacio vectorial y $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador que verifica $T^2 = \mathrm{Id}$ y $T \neq \pm\,\mathrm{Id}$.

    a) Probar que para todo $v \in V$, vale que $v + T(v)$ y $v - T(v)$ son vectores propios de T (cuando no son nulos) correspondientes a valores propios que se determinarán.

    b) Probar que vale
$$V = \mathrm{Ker}\,(T - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(T + \mathrm{Id}).$$

    c) Probar que T es diagonalizable y determinar los valores propios de T.

Solución.

1. *a*) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ son tales que $p'(x) = \lambda p(x)$, entonces tomando grados se deduce que es $\lambda = 0$ y $p(x)$ es constante.

   b) Si T fuese diagonalizable, al ser 0 su único valor propio, sería $T = 0$. Como no es ese el caso, deducimos que T no es diagonalizable.

2. El polinomio característico de A es $\chi_A(t) = -(t-2)^2(t+1)$. Las matrices P y D son

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. *a*) Usando $T^2 = \mathrm{Id}$ se prueba directamente que vale

$$T\big(v + T(v)\big) = v + T(v), \quad T\big(v - T(v)\big) = -\big(v - T(v)\big).$$

   Luego (si son no nulos) son vectores propios con valores propios 1 y -1, respectivamente. Notar que $T \neq \pm\,\mathrm{Id}$ implica que existen vectores $v_1, v_2 \in V$ tales que $v_1 + T(v_1) \neq 0$ y $v_2 - T(v_2) \neq 0$.

   b) Es $v + T(v) \in \mathrm{Ker}\,(T - \mathrm{Id})$ y $v - T(v) \in \mathrm{Ker}\,(T + \mathrm{Id})$. Luego de

$$v = \frac{1}{2}\big(v + T(v)\big) + \frac{1}{2}\big(v - T(v)\big).$$

   deducimos $V = \mathrm{Ker}\,(T - \mathrm{Id}) + \mathrm{Ker}\,(T + \mathrm{Id})$. Además es facil probar que vale $\mathrm{Ker}\,(T - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}\,(T + \mathrm{Id}) = \{0\}$. Luego es $V = \mathrm{Ker}\,(T - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(T + \mathrm{Id})$.

   c) De $V = \mathrm{Ker}\,(T - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(T + \mathrm{Id})$ deducimos que T es diagonalizable (el espacio es suma directa de subespacios propios de T) y sus valores propios son 1 y -1.