Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2018

Prueba 2

1. (**9 puntos**)
Se considera $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual (el producto escalar) . Sea $W = [(1,1,1)]$.

   a) Hallar bases ortonormales de W y de $W^{\perp}$.

   b) Hallar explícitamente las proyecciones ortogonales sobre W y $W^{\perp}$.

2. (**8 puntos**)
Se considera la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{C})$.

   a) Probar que existen una matriz unitaria Q y una matriz diagonal D tales que $A = QDQ^*$.

   b) Encontrar matrices Q y D que verifiquen la parte anterior.

   c) Hallar escalares $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ y matrices $P_1, P_2 \in M_2(\mathbb{C})$ tales que

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, \quad P_1 + P_2 = I, \quad P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0, \quad P_1^* = P_1^2 = P_1, \quad P_2^* = P_2^2 = P_2.$$

3. (**8 puntos**)
Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y T un operador en V.

   a) Probar $(\operatorname{Im} T^*)^{\perp} = \operatorname{Ker} T$. Deducir $\operatorname{Im} T^* = (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$.

   b) Si T es normal, probar $\ker T = \ker T^*$ y $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T^*$.

   c) Probar que si T es una proyección ($T^2 = T$) y T es normal, entonces T es autoadjunta (es decir, T es una proyección ortogonal).

Solución.

1. *a*) El conjunto $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right\}$ es una base ortonormal de W. $W^{\perp} = \{(x,y,z) : \ x+y+z=0\}$, luego $W^{\perp} = [(1,0,-1),\ (0,1,0)]$. Aplicando Gram-Schmidt en esa base de $W^{\perp}$ obtenemos que que $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)\right\}$ es una base ortonormal de $W^{\perp}$.

   b) $P_W(x,y,z) = \left\langle (x,y,z), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \frac{1}{3}(x+y+z)(1,1,1)$. Luego de $P_{W^{\perp}} = \mathrm{Id} - P_W$ deducimos $P_{W^{\perp}}(x,y,z) = \frac{1}{3}(2x-y-z,\ 2y-x-z,\ 2z-x-y)$.

2. Se considera la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{C})$.

   a) La matriz A es unitaria, luego es normal y por lo tanto es unitariamente equivalente a una matriz diagonal.

   b) $D = \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)$ y $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{smallmatrix}\right)$.

   c) Es $A = iP_i - iP_{-i}$, siendo

$$P_i = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}; \quad P_{-i} = \frac{-1}{2i}\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

3. *a*)

$$v \in (\operatorname{Im} T^*)^{\perp} \ \Leftrightarrow \ \langle v, T^*(u)\rangle = 0,\ \forall u \in V \ \Leftrightarrow \ \langle T(v), u\rangle = 0,\ \forall u \in V \ \Leftrightarrow \ T(v) = 0 \ \Leftrightarrow \ v \in \operatorname{Ker} T.$$

   Luego $(\operatorname{Im} T^*)^{\perp} = \operatorname{Ker} T$. Entonces

$$(\operatorname{Im} T^*)^{\perp} = \operatorname{Ker} T \ \Rightarrow \ (\operatorname{Im} T^*)^{\perp\perp} = (\operatorname{Ker} T)^{\perp} \ \Rightarrow \ \operatorname{Im} T^* = (\operatorname{Ker} T)^{\perp}.$$

   b) Como T es normal, vale $\|T(v)\| = \|T^*(v)\|$, para todo $v \in V$, luego

$$v \in \operatorname{Ker} T \ \Leftrightarrow \ T(v) = 0 \ \Leftrightarrow \ 0 = \|T(v)\| = \|T^*(v)\| \ \Leftrightarrow \ T^*(v) = 0 \ \Leftrightarrow \ v \in \operatorname{Ker} T^*.$$

   Esto prueba $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^*$. Por la parte anterior es $\operatorname{Im} T^* = (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$, luego $\operatorname{Im} T = (\operatorname{Ker} T^*)^{\perp}$ (usando $T^{**} = T$) y por lo tanto $\operatorname{Im} T = (\operatorname{Ker} T^*)^{\perp} = (\operatorname{Ker} T)^{\perp} = \operatorname{Im} T^*$.

   c) Si T es una proyección, entonces vale $V = \operatorname{Im}(T) \oplus \operatorname{Ker}(T)$ y T es la proyección sobre $\operatorname{Im}(T)$ asociada a esta descomposición. Como T es normal, entonces $\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Ker} T^* = \operatorname{Im}(T)^{\perp}$, luego T es la proyección sobre $\operatorname{Im}(T)$ asociada a $V = \operatorname{Im}(T) \oplus \operatorname{Im}(T)^{\perp}$ y por lo tanto es una proyección ortogonal.

   Otra forma de probarlo es observar que al ser T una proyección, entonces sus valores propios solo pueden ser 0 y 1. Luego T es un operador normal (complejo) con valores propios reales, y esto implica que es autoadjunto.