Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2018

Prueba 3

1. (**6 puntos**)
Sea Φ la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\Phi(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - z^2 + 2xz + 4yz, \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ sea una matriz diagonal (φ es la forma bilineal asociada).

2. (**6 puntos**)
Sea Ψ la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\Psi(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + 2xy, \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Sea ψ la forma bilineal asociada a Ψ y $A = M_{\mathcal{C}}(\psi)$, siendo $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Hallar una matriz ortogonal Q y una matriz diagonal D tales que $Q^t A Q = D$.
Sugerencia: $(1,-1,0)$ y $(1,1,0)$ son vectores propios de L_A.

3. (**7 puntos**)
Se considera la superficie cuádrica de ecuación

$$x^2 + y^2 - 2z^2 + 2xy - 3\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y = 0.$$

   a) Hallar su ecuación reducida.
   b) Clasificarla.
   c) Hallar las ecuaciones de los ejes en los cuales toma su forma reducida.

4. (**6 puntos**)
Sea V un espacio de dimensión finita y $\varphi : V \times V \to \mathbb{k}$ una forma bilineal simétrica no degenerada. Consideremos $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base φ-ortogonal de V.

   a) Probar que vale $\Phi(e_i) \neq 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.
   b) Probar

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi(v, e_i)}{\Phi(e_i)} e_i, \quad \forall v \in V.$$

   c) Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Sabiendo que existe un operador $T^\bullet \in \mathcal{L}(V)$ tal que $\varphi\big(T(u), v\big) = \varphi\big(u, T^\bullet(v)\big)$, para todo $u, v \in V$, deducir que $T^\bullet$ está definido por

$$T^\bullet(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi\big(T(e_i), v\big)}{\Phi(e_i)} e_i, \quad \forall v \in V.$$

Solución.

1. Aplicando el algoritmo de diagonalización, realizando las operaciones
$$C3 \mapsto C_3 - \frac{1}{2}C_1; \quad F3 \mapsto F_3 - \frac{1}{2}F_1; \quad C3 \mapsto C_3 - 2C_2; \quad F3 \mapsto F_3 - 2F_2,$$
obtenemos
$$\mathcal{B} = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (-1/2,-2,1)\}.$$

2. Es $\chi_A(t) = -t(t-2)(t+2)$ y vale
$$E_0 = [(1,-1,0)], \quad E_2 = [(1,1,0)], \quad E_{-2} = [(0,0,1)].$$
Luego $\{(1,-1,0),\ (1,1,0),\ (0,0,1)\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ y por lo tanto es
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Utilizamos las fórmulas del ejercicio anterior. Como uno de los valores propios de la matriz A es 0, entonces la cuádrica es degenerada.
   a) Es $\beta = Q^t B$, siendo $B = (-3\sqrt{2},\ 3\sqrt{2},\ 0)$; luego $\beta = (0,0,-6)$ y por lo tanto su forma reducida es
   $$2x^2 - 2y^2 - 6z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}y^2.$$
   b) Es un paraboloide hiperbólico.
   c) Las ecuaciones paramétricas de los ejes son
   $$(x,y,z) = t(1,-1,0), \quad (x,y,z) = t(1,1,0), \quad (x,y,z) = t(0,0,1), \quad t \in R.$$

4. *a*) Es
   $$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \Phi(e_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Phi(e_n) \end{pmatrix}.$$
   Como φ es no degenerada vale
   $$0 \neq \det M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \Phi(e_1)\cdots\Phi(e_n) \quad \Rightarrow \quad \Phi(e_i) \neq 0, \quad \forall i = 1,\dots,n.$$
   b) La fórmula se deduce escribiendo v como combinación lineal de $\mathcal{B}$ y calculando $\varphi(v,e_j)$ (j arbitrario).
   c) Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Si existe un tal $T^\bullet \in \mathcal{L}(V)$, entonces usando la fórmula de la parte anterior es
   $$T^\bullet(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi\big(T^\bullet(v), e_i\big)}{\Phi(e_i)} e_i = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi\big(e_i, T^\bullet(v)\big)}{\Phi(e_i)} e_i = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi\big(T(e_i), v\big)}{\Phi(e_i)} e_i, \quad \forall v \in V.$$