Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2018

Prueba 4A. 12/12/2018.

1. (**10 puntos**)
   Sea $A \in M_n(\mathbb{k})$ una matriz invertible y $m_A(t) = t^k + b_{k-1}t^{k-1} + \cdots + b_1 t + b_0$ su polinomio minimal.

   a) Probar $b_0 \neq 0$.

   b) Sea $p(t)$ un polinomio de grado r tal que $p(A^{-1}) = 0$ y $p(0) \neq 0$. Probar que r es mayor o igual que el grado de $m_A(t)$. *Sugerencia:* notar que $A^r p(A^{-1})$ es un polinomio en A.

   c) Probar que los polinomios minimales de A y de A^{-1} tienen el mismo grado.

   d) Probar que el polinomio minimal de A^{-1} es

$$m_{A^{-1}}(t) = \frac{1}{b_0} t^k m_A(1/t).$$

2. (**15 puntos**)
   Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$T(x, y, z, t) = (4x + y + z + t,\ 4y,\ -x - y + 3z - t,\ x + y + z + 5t), \quad \forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4.$$

   Se pide.

   a) Hallar la forma de Jordan.

   b) Hallar una base de Jordan.

Solución.

1. Escribimos $A^{-l} := (A^{-1})^l$, $l = 0, 1, \ldots$.

   a)
   $$b_0 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m_A(0) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \chi_A(0) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det A \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ es invertible.}$$

   b) Sea $p(t) = c_r t^r + \cdots + c_1 t + c_0$ un polinomio tal que $p\left(A^{-1}\right) = 0$, siendo $c_r \neq 0$ y $c_0 \neq 0$. Luego
   $$0 = A^r p\left(A^{-1}\right) = A^r(c_r A^{-r} + \cdots + c_1 A^{-1} + c_0 I) = c_r I + \cdots + c_1 A^{r-1} + c_0 A^r.$$
   Entonces vale $q(A) = 0$, siendo $q(t) = c_0 t^r + \cdots + c_r$. Luego $c_0 \neq 0$ implica $r = \operatorname{gr} q(t) \geq \operatorname{gr} m_A(t)$.

   c) Como A^{-1} es invertible, entonces $m_{A^{-1}}(0) \neq 0$ (parte 1). Luego la parte 2 implica $\operatorname{gr} m_{A^{-1}}(t) \geq \operatorname{gr} m_A(t)$. Poniendo A^{-1} en la fórmula anterior obtenemos $\operatorname{gr} m_A(t) \geq \operatorname{gr} m_{A^{-1}}(t)$, luego coinciden.

   d)
   $$\begin{aligned} 0 &= A^k + b_{k-1} A^{k-1} + \cdots + b_1 A + b_0 I = A^k \left(I + b_{k-1} A^{-1} + \cdots + b_1 A^{1-k} + b_0 A^{-k}\right) \\ &= A^k b_0 \left(A^{-k} + \frac{b_1}{b_0} A^{1-k} + \cdots + \frac{b_{k-1}}{b_0} A^{-1} + \frac{1}{b_0} I\right) \end{aligned}$$
   Luego $r\left(A^{-1}\right) = 0$, siendo
   $$r(t) = t^k + \frac{b_1}{b_0} t^{k-1} + \cdots + \frac{b_{k-1}}{b_0} t + \frac{1}{b_0} = \frac{1}{b_0} t^k m_A(1/t)$$
   Como $r(t)$ es mónico del mismo grado que $m_A(t)$, por la parte anterior deducimos $r(t) = m_{A^{-1}}(t)$.

2. *a)* Es $T = L_A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. El polinomio característico es $\chi_A(t) = (t-4)^4$ y vale
   $$A - 4I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A - 4I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Luego $\mathrm{MG}(4) = 4 - r(A - 4I) = 2$ y por lo tanto hay dos bloques de Jordan y los posibles polinomios minimales de A son $(t-4)^2$ y $(t-4)^3$. Al ser $(A-4I)^2 \neq 0$ deducimos que es $m_A(t) = (t-4)^3$. Luego la forma de Jordan de T es
   $$J = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

   b) De acuerdo a la forma de J, una base de Jordan correspondiente a T va a ser de la forma
   $$\mathcal{B} = \left\{(T-4I)^2(v),\, (T-4I)(v),\, v,\, u\right\},$$
   siendo $v \in \mathbb{R}^4 \setminus \operatorname{Ker}(T-4I)^2$, $u \in \operatorname{Ker}(T-4I)$, $\{(T-4I)^2(v), u\}$ LI. Tomamos $v = (0,0,0,1)$. Es $\operatorname{Ker}(T-4I) = \{(x,y,z,t) : \ x = 0,\ y+z+t = 0\}$ y vale $(T-4I)^2(v) = (0,0,-1,1)$. Luego podemos tomar $u = (0,1,-1,0)$ y la base queda
   $$\mathcal{B} = \{(0,0,-1,1),\, (1,0,-1,1),\, (0,0,0,1),\, (0,1,-1,0)\}.$$