Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2018

Prueba 4B. 04/02/2019.

1. (**15 puntos**)
Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (-y - z,\ x + y,\ y + 2z), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

   a) Hallar el polinomio característico y el minimal de T.

   b) Hallar una base de Jordan correspondiente a T.

2. (**10 puntos**)
Hallar la forma de Jordan de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sugerencia: recordar que si una matriz cuadrada P es de la forma $P = \left(\begin{smallmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{smallmatrix}\right)$, siendo Q y R matrices cuadradas, entonces su determinante verifica $\det P = \det Q \det R$.

Solución.

Solución:

1. *a*) Es $T = L_B$, siendo
$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Calculando obtenemos $\chi_T(t) = -(t-1)^3$. El rango de $B - I$ es 2, luego $\mathrm{MG}(1) = 1$ y por lo tanto la forma de Jordan de T es
$$J_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Luego el polinomio minimal es $m_T(t) = (t-1)^3$.

   b) Por la forma de Jordan de T deducimos que la base de Jordan $\mathcal{B}$ está formada solo por un ciclo
$$\mathcal{B} = \left\{ (B-I)^2(v),\, (B-I)(v),\, v \right\},$$
siendo v un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$ que no esté en el núcleo de $(B-I)^2$. Operando obtenemos $\operatorname{Ker}(B-I)^2 = \{(x,y,z) :\ x + y + z = 0\}$. Luego tomando $v = (1,1,1)$ obtenemos
$$\mathcal{B} = \{(0,-3,3),\, (-3,1,2),\, (1,1,1)\}.$$

2. Notar que es $A = \left(\begin{smallmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{smallmatrix}\right)$, siendo B la matriz anterior y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   Luego $\chi_A(t) = \chi_B(t)\chi_C(t) = (t-1)^4(t+1)^2$ y por lo tanto
$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad A_1 \in M_4(\mathbb{R}),\ A_2 \in M_2(\mathbb{R}).$$
Vale $r(A+I) = 4$, luego $\mathrm{MG}(-1) = 2$ y por lo tanto $A_2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

   Vale $r(A-I) = 4$, luego $\mathrm{MG}(1) = 2$; esto implica que A_1 tiene dos bloques de Jordan. Luego los posibles polinomios minimales de A son $(t-1)^3(t+1)$ y $(t-1)^2(t+1)$. Consideremos $p(t) = (t-1)^2(t+1)$. Si fuese $p(A) = 0$, entonces sería $p(B) = 0$, luego $m_B(t) = (t-1)^3$ dividiría a $p(t) = (t-1)^2(t+1)$. Como esto no es posible, deducimos que es $m_A(t) = (t-1)^3(t+1)$. Luego la forma de Jordan de A es
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$