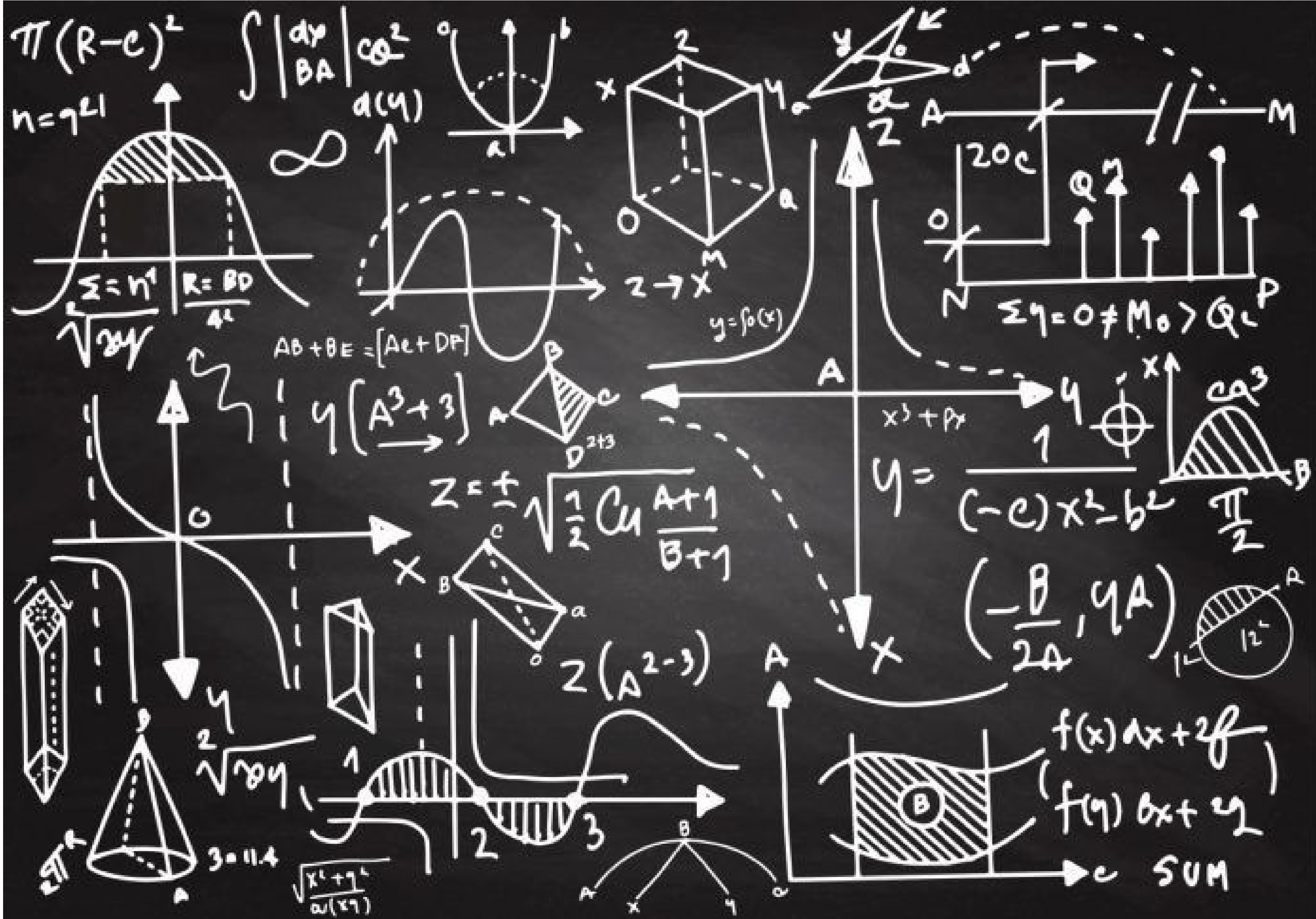
Cantidades Físicas:

Análisis Dimensional, Vectores y Escalares

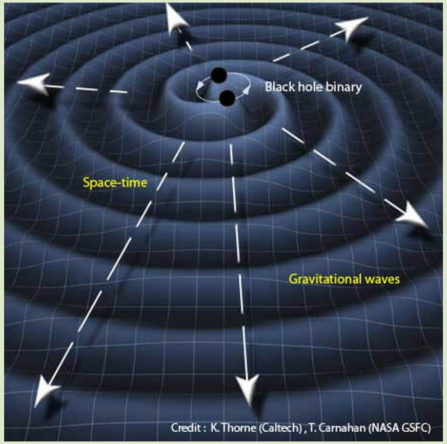
Curso:
Introducción a la Meteorología 2020

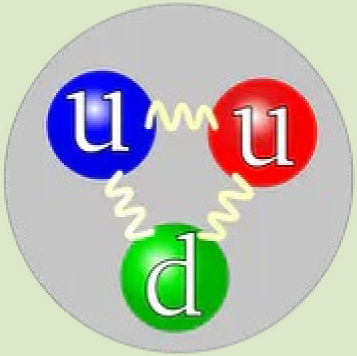
Profesor:
Nicolás Díaz Negrín



¿Qué es Física y por qué la estudiamos?

Es el estudio de las interacciones fundamentales entre dos (o más) objetos, y su efecto sobre estos

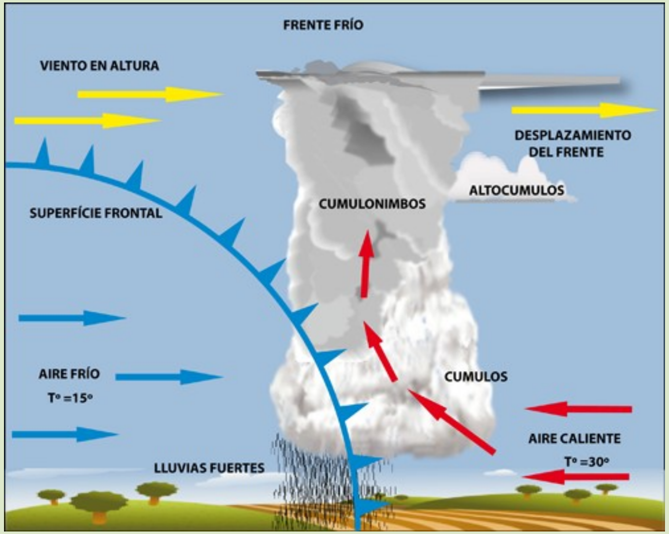




En este curso vamos a estudiar:

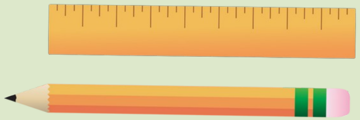
Mecánica

Termodinámica



Cantidades Estándar: longitud, masa y tiempo

Distinción entre dimensión y unidad de una cantidad física:



Dimensión: longitud

Unidad: cm, in, mi

Dimensión: tiempo

Unidad: seg, hs, días

Dimensión: masa

Unidad: kg, libra, onza

Unidades del Sistema Internacional (SI)

Tiempo: 1.0seg → Tiempo de 9.192.631.779 oscilaciones de la radiación emitida por un isótopo de Cesio (reloj atómico)

Longitud: 1.0m → Distancia recorrida por la luz en el vacío en 1/299792458 seg

Masa: 1.0kg → Se mide a partir de la constante de planck:

$1kg = (h/6.62607015 \times 10^{-34}) m^{-2} s$

Análisis Dimensional: L, M, y T

Sea X una variable física cualquiera, su dimensión nos da la naturaleza de la cantidad. La denotamos como [X]

Ej: [distancia] = L

[masa] = M

[tiempo] = T

La dimensión de cualquier variable física en mecánica, puede escribirse únicamente usando L, M y T

Ej1: Área y volúmen

$[A] = L^2$, $[V] = L^3$

Ej2: Velocidad y Aceleración

$[v] = [\text{distancia}]/[\text{tiempo}] = L/T$

$[a] = [\text{distancia}]/[\text{tiempo}]^2 = L/T^2$

Ej3: Energía (Cinética), $Ec=mv^2/2$

$[Ec] = [m][v^2] = ML^2/T^2$

Análisis Dimensional: utilidad

Chequear ecuaciones dimensionalmente

Ej1: $x=at^2/2$

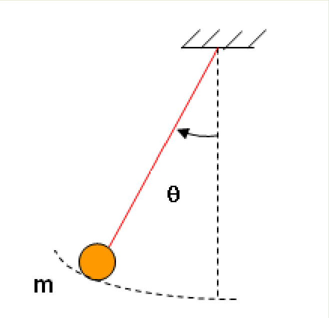
$[x] = L$, $[at^2] = [a][t^2] = (L/T^2)T^2=L$
$[x] = [at^2]$

Ej2: Los argumentos de las funciones elementales son adimensionados (exp, log, sen, cos, tan)

$$P(z)=\exp(-\alpha z) \qquad [\alpha z]=1 \rightarrow [\alpha]=\frac{1}{[z]}=\frac{1}{L}$$

Encontrar relaciones dimensionalmente

Ej: Hago un experimento, donde mido el período de un péndulo. Sospecho que el mismo depende del largo del péndulo, la aceleración de la gravedad y la masa.



$$P=l^{\alpha} m^{\beta} g^{\gamma}$$

$$[P]=[l^{\alpha} m^{\beta} g^{\gamma}]$$

$$T^1=L^{\alpha} M^{\beta}\left(\frac{L}{T^2}\right)^{\gamma}=L^{\alpha+\gamma} M^{\beta} T^{-2\gamma}$$

$$\beta=0,\ -2\gamma=1,\ \alpha+\gamma=0$$

$$P=l^{1/2} g^{-1/2}=\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Cantidades Escalares y Vectoriales

Escalares: pueden ser escritos mediante un único número.

Ej: masa, tiempo, distancia, volumen, área, energía, temperatura, etc...

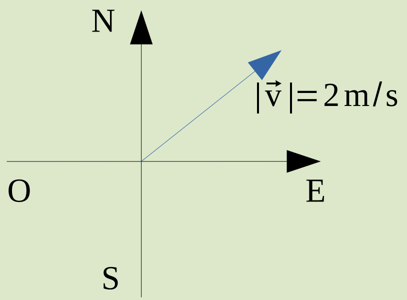
Operan según la aritmética usual:

A, B y C son escalares: A+B, AB, A/B, (A/B)C

$$A^2 A^3 = A^{2+3} = A^5$$

Vectoriales: requieren de un número y una dirección y sentido, o equivalentemente 3 números (coordenadas de un vector)

Ej: velocidad, aceleración, fuerza, momento lineal, momento angular, etc..

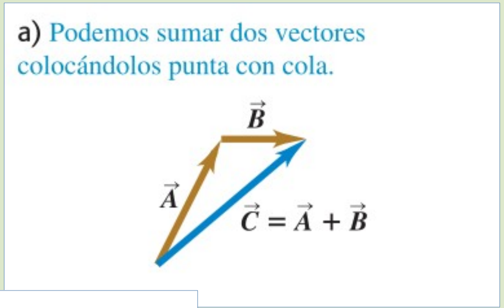


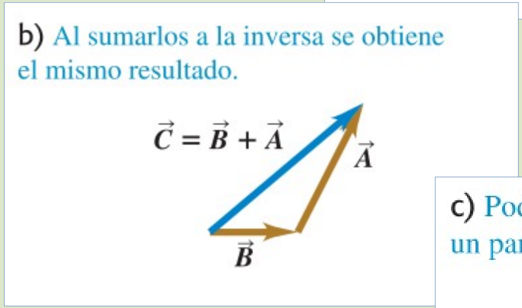
Viento con dirección NE, con módulo de $2\,m/s$

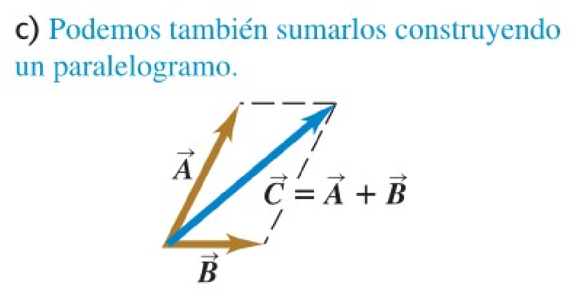
$$\vec{v} = (v_x, v_y)$$

¿Cómo Operamos con Vectores?

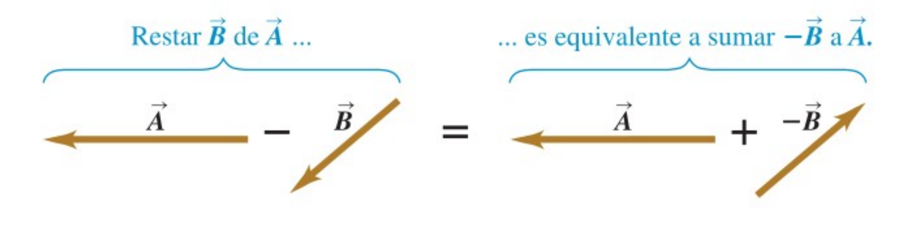
Suma:

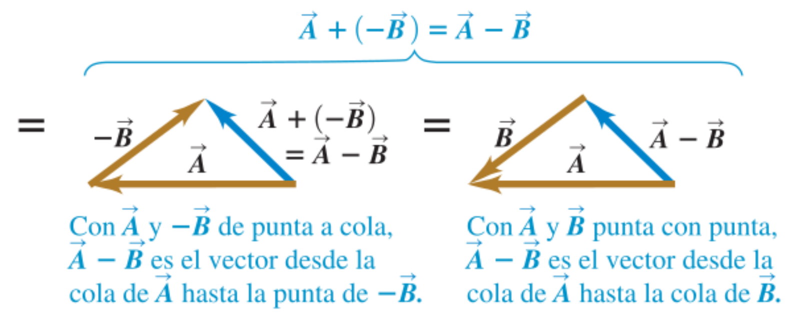






Resta:

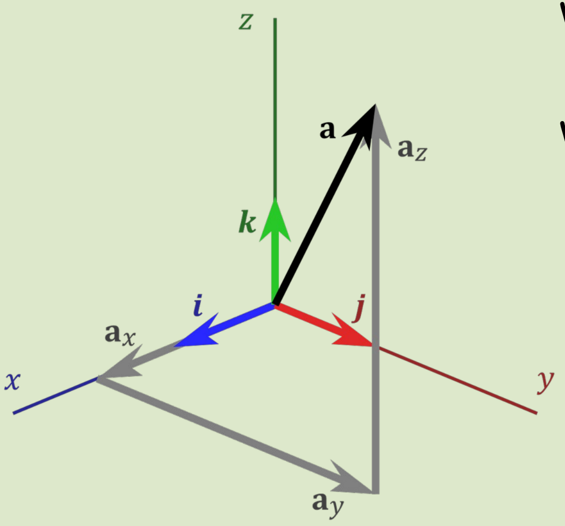




Descomposición de un Vector

Sistema de coordenadas Cartesiano:

Orígen, y direcciones vectoriales mutuamente ortogonales x, y, z



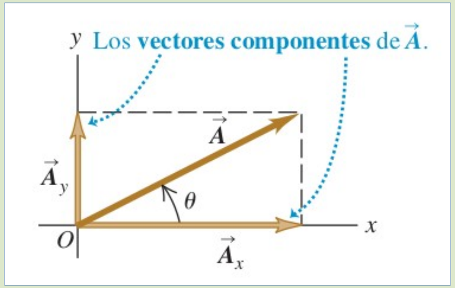
Versores:

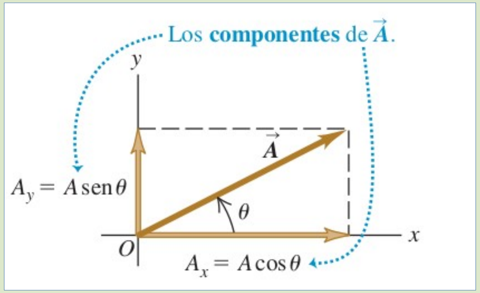
Vectores unitarios

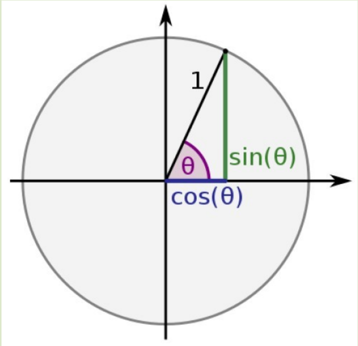
$$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$$

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

Descomposición en 2D:





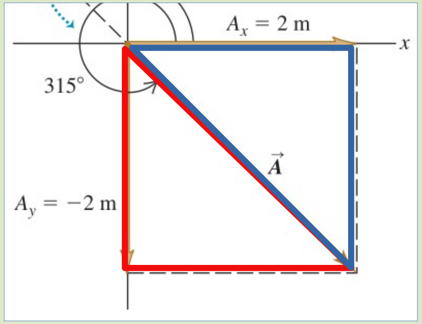


$$\cos(\theta) = \frac{\text{Cady}}{\text{hyp}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\text{Cop}}{\text{hyp}}$$

Descomposición de un Vector

Vector resultante a partir de sus componentes:



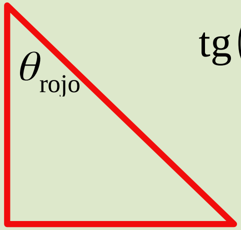
Opción A: método geométrico

Opción B: Pitágoras + trigonometría

Como Ax, Ay y A conforman un triángulo rectángulo: $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$

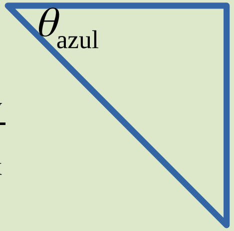
¿Cómo calculamos el ángulo?

En un triángulo rectángulo: $\mathrm{tg}(\theta) = \dfrac{Cop}{Cady}$



$\mathrm{tg}(\theta_{rojo}) = \dfrac{A_x}{A_y}$

$\mathrm{tg}(\theta_{azul}) = \dfrac{A_y}{A_x}$

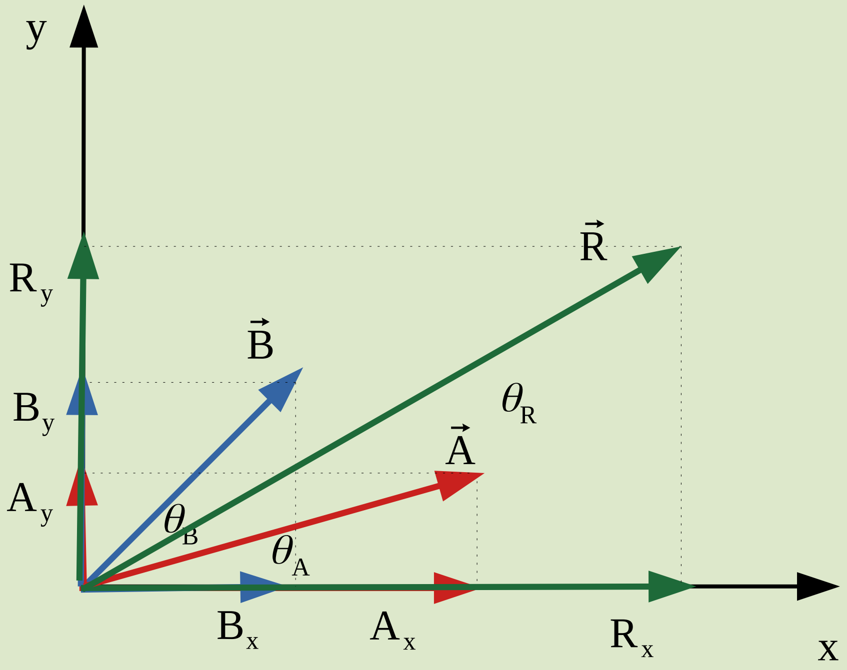


Las dos son correctas, pero ¡ojo!:

Rojo: $\theta'_{rojo} = 270 + \theta_{rojo}$

Azul: $\theta'_{azul} = -\theta_{azul}$

Ejemplo de Descomposición de Vectores



Queremos encontrar el vector resultante

$$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}$$

- Descomponemos cada uno de los vectores:

$$\begin{cases}\vec{A}=(A\cos(\theta_A), A\,\mathrm{sen}(\theta_A))=A\cos(\theta_A)\,\hat{i}+A\,\mathrm{sen}(\theta_A)\,\hat{j}\\ \vec{B}=(B\cos(\theta_B), B\,\mathrm{sen}(\theta_B))=B\cos(\theta_B)\,\hat{i}+B\,\mathrm{sen}(\theta_B)\,\hat{j}\end{cases}$$

- Sumamos componente a componente:

$$\begin{cases}R_x=A\cos(\theta_A)+B\cos(\theta_B)\\ R_y=A\,\mathrm{sen}(\theta_A)+B\,\mathrm{sen}(\theta_B)\end{cases}$$

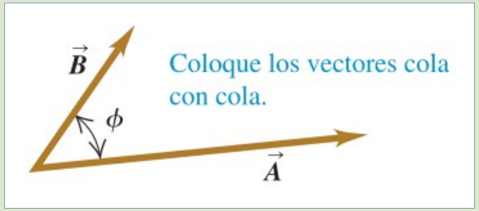
- Expresamos el vector $\vec{R}$

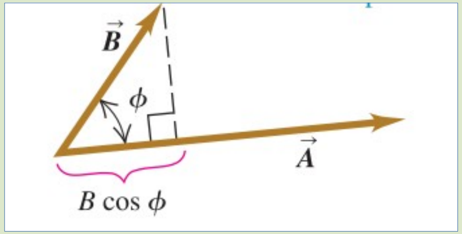
$$\vec{R}=R_x\,\hat{i}+R_y\,\hat{j} \qquad R=\sqrt{R_x^2+R_y^2} \qquad \mathrm{tg}(\theta_R)=R_y/R_x$$

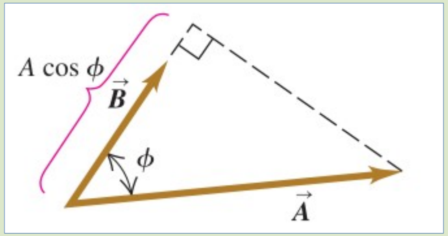
Producto Escalar y Vectorial

Producto escalar entre vectores: da como resultado un escalar

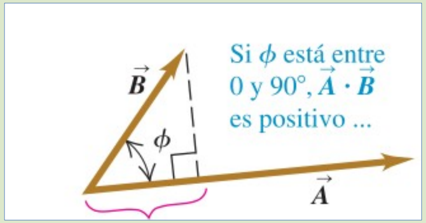
$\vec{A}, \vec{B},$ definimos $\vec{A}.\vec{B} = A\,B\cos(\phi)$

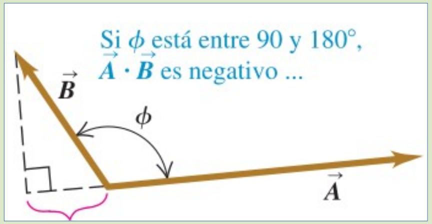


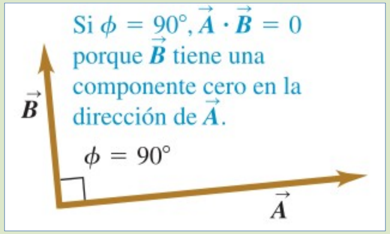




Signo del producto escalar: $\phi \in [0{,}180°] = [0, \pi]\,\text{rad}$







Casos particulares:

1. Si $\phi = 0$, $\vec{A}.\vec{B} = A\,B$
2. Si $\phi = pi/2$, $\vec{A}.\vec{B} = 0$
3. Si $\phi = pi$, $\vec{A}.\vec{B} = -A\,B$

Descomposición y Producto Escalar

Producto escalar entre vectores:

$$\vec{A}=A_x\,\hat{i}+A_y\,\hat{j}+A_z\,\hat{k}$$
$$\vec{B}=B_x\,\hat{i}+B_y\,\hat{j}+B_z\,\hat{k}$$

Opción A: calcular módulo de cada vector (Pitágoras) y usar ángulo entre los vectores

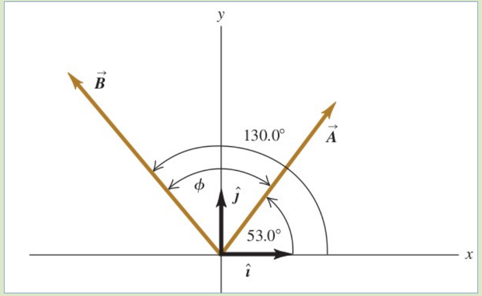
Opción B: usar descomposición en sistema de coordenadas cartesiano, y producto escalar entre versores.

$$\hat{i}.\hat{i}=\hat{j}.\hat{j}=\hat{k}.\hat{k}=1$$
$$\hat{i}.\hat{j}=\hat{i}.\hat{k}=\hat{j}.\hat{k}=0$$

$$\vec{A}.\vec{B}=(A_x\,\hat{i}+A_y\,\hat{j}+A_z\,\hat{k}).(B_x\,\hat{i}+B_y\,\hat{j}+B_z\,\hat{k})$$

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B}=A_x B_x+A_y B_y+A_z B_z}$$

Ejemplo:



$$\vec{A}=A\cos(53°)\,\hat{i}+A\,\mathrm{sen}(53°)\,\hat{j}$$
$$\vec{B}=-B\cos(50°)\,\hat{i}+B\,\mathrm{sen}(50°)\,\hat{j}$$
$$A=4.0\,,\ B=5.0$$

$$\vec{A}.\vec{B}=-A\,B\cos(53°)\cos(50°)+A\,B\,\mathrm{sen}(53°)\,\mathrm{sen}(50°)$$
$$\vec{A}.\vec{B}=20(-\cos(53°)\cos(50°)+\mathrm{sen}(53°)\,\mathrm{sen}(50°))=$$
$$=20(-0.387+0.612)\approx 4.5$$

Ejercicio: Repetir el cálculo usando opción A

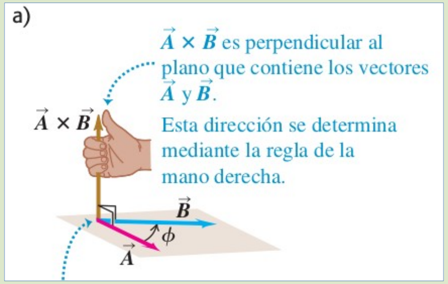
Producto Escalar y Vectorial

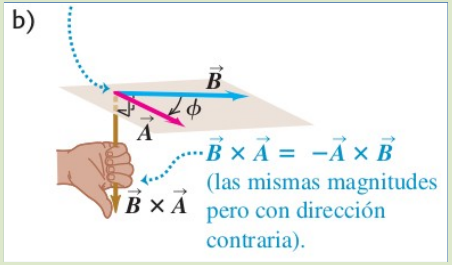
Producto vectorial entre vectores: da como resultado un vector

$\vec{A}, \vec{B},$ definimos $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$

$|\vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}| = A\,B\,\mathrm{sen}(\phi)$

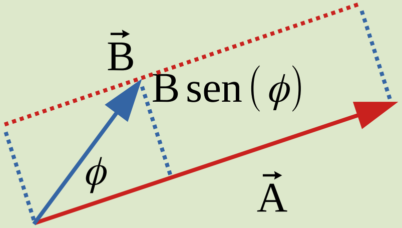
$\vec{C}$ es siempre perpendicular al plano formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$

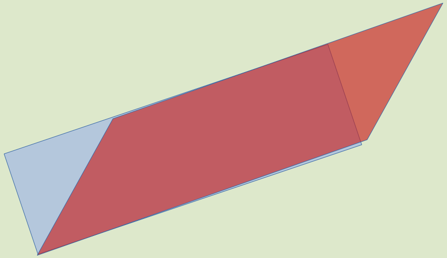




Interpretación geométrica del módulo

$\phi \in [0, 180°]$





¡El módulo es el área del Paralelogramo!

Casos particulares:

1. Si $\phi = 0$, $|\vec{C}| = 0$
2. Si $\phi = 180$, $|\vec{C}| = 0$

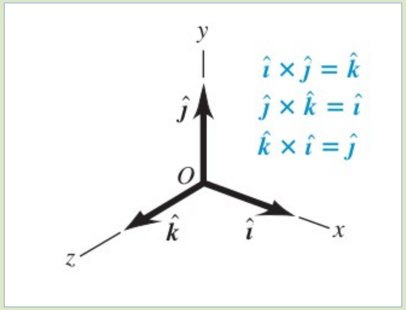
No hay área

3. Si $\phi = 90$, $|\vec{C}| = A\,B$ → Área máxima (rectándgulo)

Descomposición y Producto Vectorial

$$\begin{cases}\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}\\ \vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}\end{cases}$$

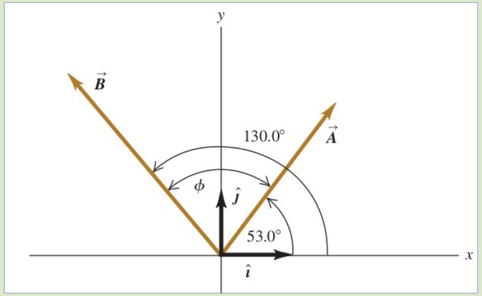
$$\begin{cases}\hat{i}\,x\,\hat{i}=\hat{j}\,x\,\hat{j}=\hat{k}\,x\,\hat{k}=0\\ \hat{i}\,x\,\hat{j}=\hat{k},\ \ \hat{i}\,x\,\hat{k}=-\hat{j}\\ \hat{j}\,x\,\hat{i}=-\hat{k},\ \ \hat{j}\,x\,\hat{k}=\hat{i}\\ \hat{k}\,x\,\hat{i}=\hat{j},\ \ \hat{k}\,x\,\hat{j}=-\hat{i}\end{cases}$$



$$\boxed{\begin{aligned}&\vec{A}\,x\,\vec{B}=(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})\,x\,(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})=\\ &(A_yB_z-A_zB_y)\hat{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{k}\end{aligned}}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ A_x&A_y&A_z\\ B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}$$

Ejemplo:



$$\vec{A}=A\cos(53°)\hat{i}+A\,\mathrm{sen}(53°)\hat{j}$$

$$\vec{B}=-B\cos(50°)\hat{i}+B\,\mathrm{sen}(50°)\hat{j}$$

$$A=4.0,\ \ B=5.0$$

$$\vec{A}\,x\,\vec{B}=(A_x\hat{i}+A_y\hat{j})\,x\,(B_x\hat{i}+B_y\hat{j})=$$
$$=A_xB_y\hat{k}+A_yB_x(-\hat{k})=(A_xB_y-A_yB_x)\hat{k}$$
$$\vec{A}\,x\,\vec{B}=\left(A\,B\cos(53°)\,\mathrm{sen}(50°)-A\,B\,\mathrm{sen}(53°)(-\cos(50°))\right)\hat{k}=$$
$$=20(0.461+0.513)\hat{k}\approx 19.5\,\hat{k}$$

Ejercicio: Repetir el cálculo usando módulo del producto vectorial

Referencias

[1] Física Universitaria, vol1, Sears y Zemansky

- Capítulo 1

[2] Física para Ciencias y Ingeniería, vol1, Serway y Jewett

- Capítulo 1