Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2020

Práctico 5

1. Para cada una de las siguientes funcionales $\alpha : V \to \Bbbk$, encontrar un vector w tal que $\alpha(v) = \langle v, w\rangle$ para todo $v \in V$.

   a) $V = \mathbb{R}^3$, $\alpha(x, y, z) = x - 2y + 4z$, con el producto interno usual.

   b) $V = \mathbb{C}^3$, $\alpha(x, y, z) = 2z - x + i(3x + y)$, con el producto interno usual.

   c) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $\alpha(p) = p(0) + p'(1)$, con el producto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p\, q$.

   d) $V = M_n(\mathbb{R})$, $\alpha(A) = \operatorname{tr}(A)$ (la traza), con el producto interno $\langle A, B\rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij}$, siendo $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$.

2. Sean $V = \mathbb{C}^3$ con el producto interno habitual y W el subespacio generado por $\{(i, 0, 1)\}$. Hallar bases ortonormales de W y de $W^\perp$. Hallar explícitamente P_W y $P_{W^\perp}$ y verificar $P_W + P_{W^\perp} = \mathrm{Id}$.

3. Sea V un espacio con producto interno, $W \subset V$ un subespacio y $v \in V$. En los casos siguientes se pide:

   - hallar $W^\perp$;
   - hallar las proyecciones $P_W(v)$ y $P_{W^\perp}(v)$;
   - calcular la distancia de v a W.

   a) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 4x\}$, $v = (2, 6)$, con el producto interno habitual.

   b) $V = \mathbb{C}^3$, W es el subespacio generado por $\{(1, i, 1 - i), (i, 1 + i, 2)\}$, $v = (0, 2i - 1, 1 + i)$, con el producto interno habitual.

   c) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $W = \mathbb{R}_1[x]$, $p(x) = 4 + 3x - 2x^2$, con el producto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p\, q$.

   d) $V = M_2(\mathbb{R})$, W es el subespacio de las matrices simétricas, $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, con el producto interno del ejercicio 1*d*.

4. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio con producto interno V. Probar

   $$(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp; \quad W_1^\perp + W_2^\perp \subset (W_1 \cap W_2)^\perp.$$

   Probar que si V es de dimensión finita, entonces $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

5. Sea V un espacio con producto interno y U, W subespacios de V.

   a) Probar $U \subset W$ implica $W^\perp \subset U^\perp$.

   b) Probar $W \subset W^{\perp\perp}$. Probar que si V es de dimensión finita[1], entonces $W = W^{\perp\perp}$.

6. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, W un subespacio de V y $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T|_W = \mathrm{Id}$ y $W^\perp \subset \ker(T)$. Probar que T es la proyección ortogonal sobre W.

7. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, W un subespacio de V y $v \in V \setminus W$. Probar que existe $z \in W^\perp$ tal que $\langle v, z\rangle \neq 0$.

[1] La hipótesis de dimensión finita es necesaria; ver el ejercicio 8.

8. Sea $l^2(\mathbb{R})$ el conjunto de las sucesiones reales (x_n) tales que la serie $\sum_n x_n^2$ converge. Escribimos $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$ a la suma de la serie.

   a) Probar que $l^2(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial real con las operaciones usuales

   $$(x+y)_n = x_n + y_n, \quad (\lambda x)_n = \lambda x_n,$$

   para todo $n \geq 0$, donde $x = (x_n)$, $y = (y_n)$.

   b) Sean $x, y \in l^2(\mathbb{R})$, $x = (x_n)$, $y = (y_n)$. Probar que para todo $N \geq 0$ vale

   $$\left(\sum_{n=0}^{N} |x_n \, y_n| \right)^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 \sum_{n=0}^{\infty} y_n^2.$$

   Concluir que la serie $\sum x_n \, y_n$ es convergente.

   c) Probar que $\langle x, y \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} x_n \, y_n$ define un producto interno en $l^2(\mathbb{R})$, donde $x = (x_n)$, $y = (y_n)$.

   d) Para cada $i \in \mathbb{N}$ consideramos la sucesión $x^{(i)} = \left(x_n^{(i)} \right)_n$ definida por $x_i^{(i)} = 1$ y $x_n^{(i)} = 0$, para todo $n \neq i$. Sea W el subespacio de $l^2(\mathbb{R})$ generado por $\{x^{(i)} : i = 0, 1, \ldots\}$. Probar $W \subsetneq W^{\perp\perp}$.