Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2020

Prueba 1

1. (**10 puntos**) En los casos siguientes si pide determinar si la matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable. En caso afirmativo, hallar una matriz invertible Q y una matriz diagonal D tales que $A = QDQ^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (**9 puntos**) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T \neq 0$ y $T \neq \mathrm{Id}$.

   a) Probar que si T es una proyección ($T^2 = T$), entonces $V = \mathrm{Ker}\,(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.
   Sugerencia: notar que vale $v = v - T(v) + T(v)$, para todo $v \in V$.

   b) Probar que si T es una proyección, entonces T es diagonalizable y sus valores propios son 0 y 1.

   c) Probar que si T es diagonalizable y sus valores propios son 0 y 1, entonces T es una proyección.

3. (**6 puntos**) En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto interno definido por

$$\big\langle (x,y,z),(x',y',z') \big\rangle = 2xx' + 2yy' + zz' + yx' + xy' - zy' - yz', \qquad \forall (x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3.$$

   a) Hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ que sea ortonormal respecto a este producto interno.

   b) Escribir el vector $(1,1,1)$ como combinación lineal de $\mathcal{B}$.

Solución.

1. En el primer caso es $\chi_A(t) = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$. Calculando el rango de $A - 2I$ obtenemos

$$r(A - 2I) = r \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 1.$$

Entonces $\mathrm{MG}(2) = 2 - 1 = 1$ y $\mathrm{MA}(2) = 2$, luego A no es diagonalizable.

En el segundo caso es $\chi_A(t) = -(t-2)^2(t-4)$. El único valor propio que puede generar problemas es $\lambda = 2$. Calculando el rango de $A - 2I$ obtenemos

$$r(A - 2I) = r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 1.$$

Entonces $\mathrm{MG}(2) = 3 - 1 = 2 = \mathrm{MA}(2)$, luego A es diagonalizable. Los subespacios propios son

$\mathrm{Ker}\,(A - 2I) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x + y + z = 0\}$; $\mathrm{Ker}\,(A - 4I) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ y = 2x \text{ y } z = -x\}$.

Luego $\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ es una base de $\mathrm{Ker}\,(A - 2I)$ y $\{(1, 2, -1)\}$ es una base de $\mathrm{Ker}\,(A - 4I)$. Entonces $A = QDQ^{-1}$, siendo

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. *a*) Si $v \in V$, entonces es fácil de probar que $v - T(v) \in \mathrm{Ker}\,(T)$ y claramente $T(v) \in \mathrm{Im}(T)$. Luego de $v = v - T(v) + T(v)$ deducimos $V = \mathrm{Ker}\,(T) + \mathrm{Im}(T)$. Si $v \in \mathrm{Ker}\,(T) \cap \mathrm{Im}(T)$, entonces $T(v) = 0$ y existe $u \in V$ tal que $v = T(u)$. Luego $v = T(u) = T^2(u) = T\big(T(u)\big) = T(v) = 0$. Esto prueba $\mathrm{Ker}\,(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{0\}$.

   b) Supongamos que T es una proyección. Sean $\mathcal{B}_1$ una base de $\mathrm{Ker}\,(T)$ y $\mathcal{B}_2$ una base de $\mathrm{Im}(T)$. Por la parte anterior sabemos que $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una base de V. Si $v \in \mathrm{Im}(T)$, entonces existe $u \in V$ tal que $v = T(u)$; luego $T(v) = T\big(T(u)\big) = T^2(u) = T(u) = v$. Entonces $[T]_{\mathcal{B}}$ es una matriz diagonal, cuyas entradas diagonales son 0 en la parte de $\mathcal{B}_1$ y 1 en la parte de $\mathcal{B}_2$. Notar que $T \neq 0$ y $T \neq \mathrm{Id}$ implican $\mathcal{B}_1 \neq \emptyset$ y $\mathcal{B}_2 \neq \emptyset$. Luego los valores propios de T son 0 y 1.

   c) Si T es diagonalizable y sus valores propios son 0 y 1, entonces existen una base $\mathcal{B}$ de V, una matriz invertible Q y una matriz diagonal D tales que $A = QDQ^{-1}$, siendo $A = [T]_{\mathcal{B}}$. Las entradas diagonales de D son los valores propios de T que son 0 y 1, luego $D^2 = D$ y por lo tanto

$$A^2 = \big(QDQ^{-1}\big)^2 = QD^2Q^{-1} = QDQ^{-1} = A.$$

   Luego $A^2 = A$ y por lo tanto $T^2 = T$.

3. *a*) Partiendo de la base canónica obtenemos $\mathcal{B} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 0),\ \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 2, 3)\right\}$.

   b) Si escribimos $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$, entonces calculando los coeficientes de Fourier de $(1, 1, 1)$ respecto a $\mathcal{B}$ obtenemos $(1, 1, 1) = \frac{3}{\sqrt{2}}w_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}w_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}w_3$.