Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2020

Prueba 2

En los ejercicios siguientes V es un $\mathbb{k}$-espacio con producto interno de dimensión finita.

1. (**10 puntos**) Consideremos $\mathbb{R}^4$ con el producto interno usual (el producto escalar).
   Sea $W = [(2,1,0,1),\ (0,1,-2,5)]$.
   a) Hallar el complemento ortogonal de W.
   b) Hallar la proyección ortogonal de $v = (1,1,1,1)$ sobre W.

2. (**9 puntos**) Un operador $T \in \mathcal{L}(V)$ es *semipositivo* si es autoadjunto y vale $\langle T(v), v\rangle \geq 0$ para todo v.
   a) Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador semipositivo. Probar que si λ es un valor propio de T, entonces $\lambda \geq 0$.
   b) Probar que si $S \in \mathcal{L}(V)$ es autoadjunto, entonces $S^2 := S \circ S$ es semipositivo.
   c) Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador semipositivo. Probar que existe un operador $S \in \mathcal{L}(V)$ tal que $S^2 = T$.
   Sugerencia: definir S es una base ortonormal adecuada.

3. (**6 puntos**) Sea $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ y $T \in \mathcal{L}(V)$.
   a) Probar que si T satisface $\langle T(v), v\rangle = 0$ para todo $v \in V$, entonces $T = 0$.
   Sugerencia: sustituir v por $v + w$ y luego por $v + iw$, siendo $v, w \in V$ arbitrarios.
   b) Probar que T es autoadjunto si y solo si $\langle T(v), v\rangle$ es real, para todo $v \in V$.

Solución.

1. Consideremos $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar. Sea $W = [(2,1,0,1),\ (0,1,-2,5)]$.

   a) $W^\perp = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 :\ 2x + y + t = 0 \text{ y } y - 2z + 5t = 0\}$.

   b) Aplicando Gram-Schmidt y normalizando obtenemos que $\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,0,1),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,1,-2)\right\}$ es una base ortonormal de W. Luego $P_W(v) = \frac{2}{3}(2,1,0,1)$.

2. a) Sea $0 \neq v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{k}$ tales que $T(v) = \lambda v$. Entonces

   $$0 \leq \langle T(v), v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda \|v\|^2 \quad \Rightarrow \quad \langle T(v), v\rangle \geq 0 \text{ y } \|v\|^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \geq 0.$$

   b) Usando dos veces que S es autoadjunto obtenemos $\langle S^2(v), v\rangle = \langle S(v), S(v)\rangle = \langle v, S^2(v)\rangle,\ \forall v \in V$. Luego S^2 es autoadjunto. Además $\langle S^2(v), v\rangle = \langle S(v), S(v)\rangle = \|S(v)\|^2 \geq 0,\ \forall v \in V$. Luego S^2 es semipositivo.

   c) Como T es autoadjunto entonces existe $\mathcal{B}$ base ortonormal tal que $[T]_\mathcal{B} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, siendo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de T. Como T es semipositivo, entonces es $\lambda_i \geq 0$, para todo i. Sea $S \in \mathcal{L}(V)$ el operador tal que

   $$[S]_\mathcal{B} = \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right).$$

   Entonces $[S^2]_\mathcal{B} = \left([S]_\mathcal{B}\right)^2 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = [T]_\mathcal{B}$, luego $S^2 = T$.

3. Sea $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ y $T \in \mathcal{L}(V)$.

   a) Siguiendo la sugerencia obtenemos $\langle T(w), v\rangle + \langle T(v), w\rangle = 0$ y $\langle T(w), v\rangle - \langle T(v), w\rangle = 0$, lo cual implica $\langle T(w), v\rangle = \langle T(v), w\rangle = 0$. Como $v, w \in V$ son arbitrarios, $\langle T(v), w\rangle = 0$ para todo w implica $T(v) = 0$, y como v es arbitrario, concluimos $T = 0$.

   b) Si T es autoadjunto, entonces $\langle T(v), v\rangle = \langle v, T(v)\rangle = \overline{\langle T(v), v\rangle}$, luego $\langle T(v), v\rangle$ es real, para todo $v \in V$. Recíprocamente, si $\langle T(v), v\rangle$ es real, para todo $v \in V$, entonces

   $$\begin{aligned}\langle (T - T^*)(v), v\rangle &= \langle T(v), v\rangle - \langle T^*(v), v\rangle = \langle T(v), v\rangle - \langle v, T(v)\rangle = \langle T(v), v\rangle - \overline{\langle T(v), v\rangle} \\ &= \langle T(v), v\rangle - \langle T(v), v\rangle = 0, \quad \forall v \in V.\end{aligned}$$

   Luego la parte anterior implica $T - T^* = 0$ y por lo tanto $T = T^*$; luego T es autoadjunto.