Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2020

Prueba 4 - examen 12/02/2021

1. (**13 puntos**)
Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_2 - x_3,\ x_1 + 2x_2,\ x_2 + 3x_3,\ x_4,\ 2x_4 + x_5), \quad \forall (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5.$$

   a) Sea $u = (1, 0, 0, 0, 0)$. Probar $u \in \operatorname{Ker}(T - 2\operatorname{Id})^3$.
   b) Hallar la forma de Jordan de T.
   c) Hallar una base de Jordan correspondiente.

2. (**12 puntos**)
Sea $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$ que verifica $T^4 = 5T^3 - 3T^2 - 9T$ y se sabe que T es sobreyectiva.

   a) Probar que 0 no es valor propio de T.
   b) Encontrar todos los posibles polinomios minimales de T.
   c) Si además se sabe que T no es diagonalizable, hallar las posibles formas de Jordan de T.
   d) Si además de lo anterior vale $\operatorname{rango}(T + \operatorname{Id}) = 3$, hallar la forma Jordan y el polinomio característico de T.

Solución.

1. Es $T = L_A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Es

   $$(T - 2\,\mathrm{Id}\,)(u) = (-1,1,0,0,0), \quad (T - 2\,\mathrm{Id}\,)^2(u) = (0,-1,1,0,0), \quad (T - 2\,\mathrm{Id}\,)^3(u) = (0,0,0,0,0).$$

   b) Es $\chi_T(t) = -(t-2)^3(t-1)^2$, $\mathrm{MG}(2) = 1$ y $\mathrm{MG}(1) = 1$; luego la forma de Jordan de T es

   $$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   c) La base de Jordan tiene la forma

   $$\mathcal{B} = \left\{(T - 2\,\mathrm{Id}\,)^2(u),\, (T - 2\,\mathrm{Id}\,)(u),\, u,\, (T - \mathrm{Id}\,)(v),\, v\right\},$$

   siendo $u \in \mathrm{Ker}(T - 2\,\mathrm{Id}\,)^3 \setminus \mathrm{Ker}(T - 2\,\mathrm{Id}\,)^2$ y $v \in \mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id}\,)^2 \setminus \mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id}\,)$. Por la parte anterior podemos tomar $u = (1,0,0,0,0)$. Es

   $$A - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A - I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Luego

   $$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id}\,) &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 : \ x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0\} \\ \mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id}\,)^2 &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 : \ x_1 = x_2 = x_3 = 0\}. \end{aligned}$$

   Tomamos $v = (0,0,0,1,0)$. Luego una base de Jordan es

   $$\mathcal{B} = \{(0,-1,1,0,0),\, (-1,1,0,0,0),\, (1,0,0,0,0),\, (0,0,0,0,2),\, (0,0,0,1,0)\}.$$

2. *a*) Si 0 es valor propio de T, entonces $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$, luego T no es inyectiva, lo cual equivale a que T no es sobreyectiva.

   b) $m_t(t)$ divide a $t(t+1)(t-3)^2$. La parte anterior implica que 0 no es raíz de $m_T(t)$, luego los posibles polinomios minimales son

   $$t+1, \quad t-3, \quad (t+1)(t-3), \quad (t-3)^2, \quad (t+1)(t-3)^2.$$

c) Como T no es diagonalizable, entonces es $m_T(t) = (t-3)^2$ o $m_T(t) = (t+1)(t-3)^2$. Si $m_T(t) = (t-3)^2$, entonces $\chi_T(t) = (t-3)^4$ y si $m_T(t) = (t+1)(t-3)^2$ entonces $\chi_T(t) = (t+1)(t-3)^3$ o $\chi_T(t) = (t+1)^2(t-3)^2$. Luego las posibles formas de Jordan de T son

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d) De las 4 matrices anteriores la única que corresponde a $\operatorname{rango}(T + \mathrm{Id}) = 3$ es la tercera, luego

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \chi_T(t) = (t-3)^3(t+1).$$