Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2020

Práctico 6

En lo que sigue V será siempre un espacio con producto interno de dimensión finita. En $\Bbbk^n$ usaremos siempre el producto interno usual. A la composición de operadores la escribiremos TS en vez de $T \circ S$.

1. Probar que cada uno de los operadores siguientes es autoadjunto y hallar una base ortonormal del espacio en la cual se diagonaliza.

   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (2x - 2y, -2x + 5y)$.

   b) $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, definido por $T(x, y) = \big(2x + (3 - 3i)y,\, (3 + 3i)x + 5y\big)$.

   c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (y + z,\, x + z,\, x + y)$.

2. Sean $T, S \in \mathcal{L}(V)$ operadores autoadjuntos. Probar que TS es autoadjunto si y solo si $TS = ST$.

3. Sea $\Bbbk = \mathbb{C}$ y $T \in \mathcal{L}(V)$ autoadjunto.

   a) Probar $\langle T(v), v\rangle \in \mathbb{R}$, para todo $v \in V$.

   b) Probar $\|T(v) \pm iv\|^2 = \|T(v)\|^2 + \|v\|^2$, para todo $v \in V$. Deducir que $T + i\,\mathrm{Id}$ y $T - i\,\mathrm{Id}$ son operadores invertibles.

4. Sean $T, S \in \mathcal{L}(V)$ operadores autoadjuntos tales que $TS = ST$. Probar que existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V tal que T y S se diagonalizan simultáneamente en $\mathcal{B}$.

5. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Decimos que T es *positivo* si es autoadjunto y verifica $\langle T(v), v\rangle > 0$ para todo $v \neq 0$ y que es *semipositivo* si es autoadjunto y verifica $\langle T(v), v\rangle \geq 0$ para todo v.

   a) Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ autoadjunto. Probar que T es positivo (semipositivo) si y solo si todos sus valores propios son positivos (no negativos).

   b) Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(\Bbbk)$. Probar que $L_A \in \mathcal{L}(\Bbbk^n)$ es positivo (semipositivo) si y solo si A es hermitiana si $\Bbbk = \mathbb{C}$ o simétrica si $\Bbbk = \mathbb{R}$ y todos sus valores propios son positivos (no negativos).

6. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Probar.

   a) Si T es autoadjunto e invertible, entonces T^{-1} es autoadjunto.

   b) Si T es positivo, entonces T es invertible y T^{-1} es positivo.

7. Existencia de la "raíz cuadrada" de un operador semipositivo.

   a) Probar que si $S \in \mathcal{L}(V)$ es autoadjunto, entonces S^2 es semipositivo.

   b) Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador semipositivo. Probar que existe un operador semipositivo $S \in \mathcal{L}(V)$ tal que $S^2 = T$. *Sugerencia:* definir S es una base ortonormal adecuada.
   Notar que si además T es positivo, entonces S también lo es.

8. Unicidad de la raíz cuadrada de un operador semipositivo.

   a) Probar que si $S \in \mathcal{L}(V)$ es semipositivo y verifica $S^2 = \lambda \operatorname{Id}$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda \geq 0$, entonces $S = \sqrt{\lambda} \operatorname{Id}$. *Sugerencia:* probar que si μ es un valor propio de S, entonces $\mu^2 = \lambda$.

   b) Mostrar mediante un ejemplo que la afirmación anterior es falsa sin la condición de semipositivo. *Sugerencia:* calcular el cuadrado de $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

   c) Sean $S, T \in \mathcal{L}(V)$ semipositivos tales que $S^2 = T$.
   Sean $0 \leq \lambda_1 < \cdots < \lambda_k$ los valores propios de T. Para cada $i = 1, \ldots, k$, sea $W_i = \operatorname{Ker}(T - \lambda_i \operatorname{Id})$.

   1) Probar que S y T conmutan. Concluir que cada W_i es S-invariante.
   2) Sea $S_i = S|_{W_i} \in \mathcal{L}(W_i)$. Probar $S_i = \sqrt{\lambda_i} \operatorname{Id}_{W_i}$.
   3) Concluir que existe un único $S \in \mathcal{L}(V)$ semipositivo tal que $S^2 = T$.

   Nota. Los ejercicios anteriores prueban que si $T \in \mathcal{L}(V)$ es semipositivo (positivo) entonces existe un único $S \in \mathcal{L}(V)$ semipositivo (positivo) tal que $S^2 = T$.

9. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador positivo y $\langle\ ,\ \rangle$ el producto interno de V. Probar que si definimos $\langle\ ,\ \rangle'$ por $\langle u, v\rangle' = \langle T(u), v\rangle$, entonces $\langle\ ,\ \rangle'$ es otro producto interno en V.

10. Sean $T, S \in \mathcal{L}(V)$ operadores autoadjuntos con S positivo. Probar que TS y ST son operadores diagonalizables que solo tienen valores propios reales.

    Sugerencia: Mostrar que TS es autoadjunto con respecto al producto interno $\langle u, v\rangle' = \langle S(u), v\rangle$. Para el caso de ST, repetir el argumento con S^{-1} en vez de S.

11. El objetivo de este ejercicio es probar que si $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno en V, entonces cualquier otro producto interno $\langle\ ,\ \rangle'$ en V se puede expresar de forma única como $\langle u, v\rangle' = \langle T(u), v\rangle$, siendo $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador positivo.

    Supongamos entonces que $\langle\ ,\ \rangle$ y $\langle\ ,\ \rangle'$ son dos productos internos en V.

    a) Probar que para cada $v \in V$, existe un único $v_0 \in V$ tal que $\langle u, v\rangle' = \langle u, v_0\rangle$, $\forall u \in V$.

    b) Definir una función $T : V \to V$ por $T(v) = v_0$, siendo v y v_0 como en la parte anterior. Probar que T es lineal, autoadjunto y positivo. Completar el resto de la prueba.

12. Sea $\langle\ ,\ \rangle'$ el producto interno en $\mathbb{R}^2$ definido por $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle' = 2\, x_1 x_2 + y_1 x_2 + x_1 y_2 + y_1 y_2$.

    a) Hallar $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tal que $\langle u, v\rangle' = \langle T(u), v\rangle$, para todo $u, v \in \mathbb{R}^2$, siendo $\langle\ ,\ \rangle$ el producto escalar.

    b) Verificar que T es un operador positivo.