Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2020

Práctico 8

En lo que sigue $\mathbb{k}$ es un cuerpo tal que $\operatorname{car}\mathbb{k} \neq 2$ y los espacios son de dimensión finita.

1. Determinar cuáles de las siguientes funciones $\varphi : V \times V \to \mathbb{k}$ son formas bilineales.

   a) $V = \mathbb{k}$, $\varphi(x, y) = x + 2y$.
   b) $V = \mathbb{k}^2$, $\varphi\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = (x_1 - y_1)^2 + x_2 y_2$.
   c) $V = \mathbb{k}^2$, $\varphi\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = (x_1 + y_1)^2 + (x_1 - y_1)^2$.
   d) $V = \mathbb{k}^2$, $\varphi\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = (x_1 + y_1)^2 - (x_1 - y_1)^2$.
   e) $V = \mathbb{k}^2$, $\varphi\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = x_1 y_2 - x_2 y_1$.
   f) V arbitrario, dados $\alpha, \beta \in V^*$ fijos, definimos $\varphi(u, v) = \alpha(u)\,\beta(v)$, para todo $u, v \in V$.
   g) $V = M_{m\times n}(\mathbb{k})$, dada $A \in M_m(\mathbb{k})$, definimos $\varphi(X, Y) = \operatorname{tr}\big(X^t A Y\big)$, para todo $X, Y \in M_n(\mathbb{k})$.

2. Probar que las siguientes funciones son formas bilineales y hallar la matriz asociada a cada una de ellas en la base $\mathcal{B}$ dada.

   a) $\varphi : \mathbb{k}^3 \times \mathbb{k}^3 \to \mathbb{k}$, $\varphi((x, y, z)(x', y', z')) = xx' - 2xy' + yx' - zz'$, $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$.
   b) $\varphi : M_2(\mathbb{k}) \times M_2(\mathbb{k}) \to \mathbb{k}$, $\varphi(X, Y) = \operatorname{tr}(X) \operatorname{tr}(Y)$, $\mathcal{B}$ es la base canónica de $M_2(\mathbb{k})$.

3. Sea φ la forma bilineal en $\mathbb{k}^2$ cuya forma cuadrática asociada es $\Phi(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, siendo $a, b, c \in \mathbb{k}$ escalares fijos. Probar que φ es no degenerada si y solo si $b^4 - 4ac \neq 0$.

4. Se considera $\varphi \in \operatorname{Bil}_S\big(M_2(\mathbb{k})\big)$ definida por $\varphi(X, Y) = \operatorname{tr}(X) \operatorname{tr}(Y)$, para todo $X, Y \in M_2(\mathbb{k})$. Probar que φ es degenerada y hallar su radical.

5. Se define $\varphi : M_2(\mathbb{k}) \times M_2(\mathbb{k}) \to \mathbb{k}$ mediante $\varphi(X, Y) = \operatorname{tr}(XY)$, para todo $X, Y \in M_2(\mathbb{k})$.

   a) Probar que φ es una forma bilineal simétrica.
   b) Probar que φ es no degenerada.
   c) Sea $W = \{A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{k}) : \ a_{12} = 0\}$. Hallar el radical de la restricción de φ a W.

6. Para cada una de las siguientes matrices A hallar matrices D diagonal y Q invertible t.q. $D = Q^t A Q$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. En cada uno de los casos siguientes encontrar una base φ-ortogonal $\mathcal{B}$ y hallar $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

   a) $\varphi \in \operatorname{Bil}_S\left(\mathbb{k}^2\right)$, tal que $\Phi(x, y) = x^2 + 6xy + 2y^2$, para todo $(x, y) \in \mathbb{k}^2$.
   b) $\varphi \in \operatorname{Bil}_S\left(\mathbb{k}^2\right)$, tal que $\Phi(x, y) = 2xy$, para todo $(x, y) \in \mathbb{k}^2$.
   c) $\varphi = \beta_A \in \operatorname{Bil}_S\left(\mathbb{k}^3\right)$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

d) $\varphi \in \operatorname{Bil}_S(\Bbbk^3)$, tal que $\Phi(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 6yz$, para todo $(x,y,z) \in \Bbbk^3$.

8. Sea $\Phi : M_2(\Bbbk) \to \Bbbk$ definida por $\Phi(X) = \det X$, para todo $X \in M_2(\Bbbk)$.

   a) Probar que Φ es una forma cuadrática en $M_2(\Bbbk)$.

   b) Hallar una base φ-ortogonal $\mathcal{B}$ de $M_2(\Bbbk)$ y hallar $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

   c) Sea $\Bbbk = \mathbb{C}$ y $W = \{X \in M_2(\mathbb{C}) : \ X^t = \overline{X} \text{ y } \operatorname{tr} X = 0\}$ las matrices hermitianas de traza nula. Probar que Φ es definida negativa en W, es decir, que vale $\Phi(X) < 0$, para todo $0 \neq X \in W$.

9. Hallar en los siguientes casos la forma bilineal simétrica φ asociada a la forma cuadrática Φ, una base ortonormal $\mathcal{B}$ del espacio tal que $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ es diagonal, y el índice, la signatura y el rango de φ. En todos los casos el producto interno es el producto escalar.

   a) $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \Phi(x,y) = 2xy$.

   b) $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \Phi(x,y) = 7x^2 - 8xy + y^2$.

   c) $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \Phi(x,y,z) = 3x^2 - 2xz + 3y^2 + 3z^2$.

10. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrices simétricas tales que B es invertible y tiene todos sus valores propios del mismo signo. Probar que existe una matriz invertible $Q \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $Q^t A\, Q$ y $Q^t B\, Q$ son matrices diagonales. *Sugerencia:* considerar primero el caso en que B tiene todos sus valores propios positivos y por lo tanto $\langle u, v\rangle = u^t B v$ define un producto interno en $\mathbb{R}^n$.

11. Sea V un espacio de dimensión finita y $\varphi \in \operatorname{Bil}_S(V)$ una forma no degenerada.

    a) Probar que si $u, v \in V$ son tales que $\varphi(u,w) = \varphi(v,w)$, para todo $w \in V$, entonces $u = w$.

    b) Sea $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base φ-ortogonal de V.

    1) Probar $\Phi(e_i) \neq 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.
    2) Probar $v = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(v,e_i)}{\Phi(e_i)} e_i$, para todo $v \in V$.
    3) Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Probar que existe un único $T^\bullet \in \mathcal{L}(V)$ tal que $\varphi\big(T(u), v\big) = \varphi\big(u, T^\bullet(v)\big)$, $\forall u, v \in V$.

    c) Probar que la correspondencia $T \mapsto T^\bullet$ definida en el ítem anterior verifica

    $$(aT + S)^\bullet = aT^\bullet + S^\bullet, \quad (TS)^\bullet = S^\bullet T^\bullet, \quad (T^\bullet)^\bullet = T, \quad \forall\, T, S \in \mathcal{L}(V),\ a \in \Bbbk.$$

    Nota. Observar que estas fórmulas generalizan las propiedades de los adjuntos.

12. En $\mathbb{R}^4$ se considera la forma cuadrática Φ definida por $\Phi(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ y φ la forma bilineal simétrica asociada. Sea $\nu \in \mathbb{R}$ tal que $|\nu| < 1$. Definimos $T_\nu \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ mediante $T_\nu(x,y,z,t) = \left(\frac{x-\nu t}{\sqrt{1-\nu^2}}, y, z, \frac{t-\nu x}{\sqrt{1-\nu^2}}\right)$, para todo $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

    a) Probar que Φ es no degenerada.

    b) Probar $\Phi\big(T_\nu(v)\big) = \Phi(v)$, para todo $v \in \mathbb{R}^4$. Deducir $\varphi\big(T_\nu(u), T_\nu(v)\big) = \varphi(u,v)$, $\forall u, v \in \mathbb{R}^4$.

    c) Probar que T_ν es invertible y vale $(T_\nu)^\bullet = (T_\nu)^{-1} = T_{-\nu}$.

    Nota. Esta forma cuadrática aparece en el estudio de la teoría especial de la relatividad. El mapa T_ν representa el cambio de coordenadas respecto a un sistema inercial que se mueve a velocidad ν (que está medida en relación a la velocidad de la luz).