Solución a la ecuación de calor

Ecuación de calor unidimensional:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Observemos que la ecuación admite una solución estacionaria independiente del tiempo de la forma:

$$\theta(x) = C_1 x + C_2$$

donde C_1 y C_2 son constantes a determinar.

Para encontrar una solución transitoria, suponemos soluciones de la forma $u = X(x)\,T(t)$. Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\frac{1}{\alpha}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X}$$

Para que la igualdad se verifique para todo x y para todo t, cada término tiene que ser igual a una constante:

$$\frac{1}{\alpha}\frac{T'}{T} = -k^2$$

$$\frac{X''}{X} = -k^2$$

Para T las soluciones son de la forma: $T(t) = \exp\left(-\alpha k^2 t\right)$

y para X las soluciones son de la forma: $X(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$

Una solución de la ecuación diferencial tiene la forma:

$$u(x,t) = [A \sin(kx) + B \cos(kx)] \exp\left(-\alpha k^2 t\right) + C_1 x + C_2$$

Los parámetros A, B, k, C_1 y C_2 se tienen que determinar a partir de las condiciones de borde y de la condición inicial.

Condiciones de frontera para x =0: $u(0,t) = T_1$.

$$u(0,t) = B \exp\left(-\alpha k^2 t\right) + C_2 = T_1$$

Se verifica si $B = 0$ y $C_2 = T_1$.

Condiciones de frontera para x =L: $u(L,t) = T_2$.

$$u(L,t) = A \sin\left(kL\right) \exp\left(-\alpha k^2 t\right) + C_1 L + T_1 = T_2$$

Se verifica si $k = \frac{n\pi}{L}$ (con n entero) y $C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L}$.

La solución general es una combinación lineal de las soluciones dependientes de n:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left(-\alpha \frac{n^2\pi^2}{L^2} t\right) + \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$$

Falta hallar los A_n, que se determinan con la condición inicial: $u(x,0) = T_0$.

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1 = T_0$$

El primer término es un desarrollo en serie de Fourier. Para hallar los A_n podemos multiplicar cada término por $\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ (donde m es entero) e integramos entre $x = 0$ y $x = L$.

$$\int_0^L \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1 - T_0\right] \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx + \ldots$$

$$\int_0^L \left(\frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1 - T_0\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = 0$$

Observemos que el primer término es nulo excepto cuando $m = n$. Por lo tanto,

$$A_m \int_0^L \sin^2\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx + \int_0^L \left(\frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1 - T_0\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = 0$$

Solo resta calcular las integrales y despejar A_m.

$$A_m = \frac{2}{m\pi}\left[T_0 - T_1 + (T_2 - T_0)\cos(m\pi)\right]$$

Finalmente, LA SOLUCIÓN al problema con las condiciones de borde e inicial que se han planetado es:

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[T_0 - T_1 + (T_2 - T_0)\cos(n\pi)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\exp\left(-\alpha\frac{n^2\pi^2}{L^2}t\right)$$

$$\ldots + \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$$