Facultad de Ciencias.
Matemática Discreta 2020

Práctico 1: Inducción

1. Supongamos que $P(n)$ es una cierta afirmación acerca del número natural n. Supongamos los siguientes casos (por separado):

   - se cumple $P(0)$ y cada vez que vale $P(n)$ vale también $P(n+2)$,
   - se cumple $P(5)$ y cada vez que vale $P(n)$ vale $P(n+1)$,

   a) En cada caso, describir (sin dar una prueba) el conjunto de los naturales para los cuales estamos seguros de que se cumple la afirmación.

   b) Usar el principio de inducción para probar cada una de ellas.

2. Probar que:

   a) $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5 para todo natural n.

   b) La suma de los cubos de tres enteros consecutivos es múltiplo de 9.

   c) Si A tiene n elementos, su conjunto de partes tiene 2^n.

3. Probar que las potencias de 2 con exponente par son un múltiplo de 3 más 1.

4. Consideremos $S(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + ... + n$

   a) Probar que si para cierto natural n, se tiene $S(n) = \frac{n^2+n+2}{2}$ entonces, también se cumple la igualdad para $n+1$.

   b) Probar que si para cierto natural n, se tiene $S(n) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$, también se cumple la igualdad para $n+1$..

   c) Si ambas fórmulas para $S(n)$ fuesen verdaderas para todo natural n, tendríamos que $n^2 + n = n^2 + n + 2$. ¿Porqué esto es imposible?

   d) ¿Cuál de las fórmulas para $\sum\limits_{i=1}^{n} i$ es incorrecta? ¿Por qué?

   e) ¿Qué reflexión deja las preguntas del punto anterior?

5. Calcular la suma de los primeros 100,000 enteros positivos impares.

6. Analizar lo que sigue: **Teorema: Todos los caballos tienen el mismo color.**
   Demostración: Sea P_n la proposición *Todos los caballos de un conjunto de n caballos son del mismo color.* Probaremos que P_n es verdadera para todo natural n utilizando inducción y con esto obtenemos la afirmación.

- $P1$ es claramente verdadera.
- Supongamos que P_k es verdadera. Veamos que P_{k+1} tambén es verdadera. Sean $\{c_1, c_2, \cdots, c_{k+1}\}$ el conjunto de los $k+1$ caballos. Consideremos el conjunto de k caballos $\{c_i \mid i \leq k\}$. Por hipótesis de induccón, todos estos caballos son del mismo color. Ahora bien, consideremos el conjunto $\{c_i \mid i \leq k+1, i \neq k\}$. Por hipótesis de inducción, todos son del mismo color. Como c_1 y c_k son del mismo color, al igual que y c_1 y c_{k+1}, se deduce que los $k+1$caballos son del mismo color. Luego P_{k+1} es verdadera.

7. Demostrar las siguientes igualdades:

    a) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

    b) $\sum_{i=0}^{n} 2i = n(n+1)$

    c) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$

    d) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

    e) $\sum_{i=1}^{n} i(i!) = (n+1)! - 1$

    f) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

    g) $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(2i+1)(2i+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$

    h) $\prod_{i=1}^{n}(1 + \frac{1}{i}) = n+1$

    i) $\prod_{i=2}^{n}(1 - \frac{1}{i^2}) = \frac{n+1}{2n}$

    j) $\prod_{i=1}^{n}(1 + x^{2i-1}) = \frac{1-x^{2^n}}{1-x}$ para $x \neq 1$

8. Demostrar las siguientes desigualdades:

    a) $(1+x)^n \geq 1+nx \; \forall x > -1, n \in \mathbb{N}$

    b) $n - 2 < \frac{n^2-n}{12}$, $\forall n > 10$

    c) $\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n} \; \forall n \geq 2$

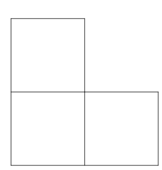
    d) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n} \; \forall n \geq 1$

    e) $2^n < n!$, $\forall n > 3$

    f) $n^2 < 2^n$, $\forall n > 4$

9. Probar que $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, $\forall x \neq 1$.

10. Consideremos un tablero cuadriculado de $2^n \times 2^n$ al que le falta una casilla. Probar que sin importar el valor de n, el tablero puede ser cubierto con fichas de la forma



11. Las Torres de Hanoi es un rompecabeza que consiste en 3 ejes con n anillos concéntricos de diámetro decreciente, todos ellos colocados en el segundo eje. El juego consiste en pasar todos los anillos desde el eje ocupado a uno de los otros ejes vacíos, moviendo de a un anillo a la vez. Sólo puede moverse el anillo superior de una pila, y sólo puede colocarse en otro eje siempre y cuando no se sitúe sobre un anillo de diámetro inferior.

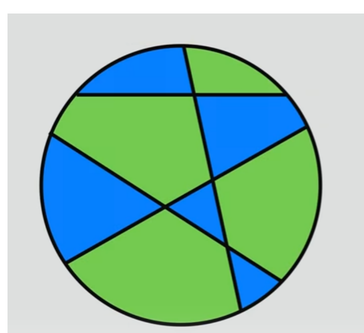
Demuestre que el juego puede resolverse mediante $2^n - 1$ desplazamientos, y que esto no puede hacerse en menos desplazamientos.

12. *a*) Demostrar que $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

    b) Probar que todo natural mayor o igual a 2 se descompone en producto de primos.

Ejercicios Complementarios

13. Dadas una circunsferencia y n cuerdas, probar que se pueden colorear con dos colores las regiones que determinan de forma que no queden dos regiones vecinas coloreadas con el mismo color.



14. Probar que la suma de los ángulos de un polígono convexo con n lados es $\pi(n-2)$.

Primera entrega: se pide entregar el ejercicio 12 antes del 28 de abril.