Facultad de Ciencias.
Centro de Matemática.
Matemática Discreta 2019

Examen Julio.

1. *a*) Contar la cantidad de palabras de 7 letras que pueden formarse con las letras C, R, T, A, P.

   b) ¿Cuántas de las anteriores no empiezan ni terminan en A?

2. Recordar que $\mathrm{Sob}(m, n)$ denota la cantidad de funciones sobreyectivas de un conjunto de m elementos en un conjunto de n elementos. En lo que sigue suponemos $m \geq n \geq 2$.

   a) Probar que $\mathrm{Sob}(m, n) \geq n!$.

   b) Dar una prueba combinatoria de la siguiente igualdad:

   $$\mathrm{Sob}(m+1, n) = n(\mathrm{Sob}(m, n-1) + \mathrm{Sob}(m, n)).$$

   c) Probar, por inducción en $k \geq 0$, que $\mathrm{Sob}(n+k, n) \geq (k+1)n!$, para todos n, k tales que $n \geq 2, k \geq 0$.

3. *a*) ¿Cuántos subgrafos de K_6 tienen 6 vértices?

   b) ¿Cuántos de estos son no planos y tienen un vértice de grado menor o igual a 1?

Solución Julio

1. *a*) Son 5 letras para ubicar con posibles repeticiones en 7 casilleros, donde nos importa el orden en que las ubicamos. Esto puede pensarse como la cantidad de funciones que a cada casillero le asigna una de las 5 letras, o sea la cantidad de funciones de un conjunto de 7 elementos en uno de 5, esto es $5^7 = 78125$.

   b) Las que empiezan en A son 5^6, y también las que terminan en A. Por otra parte las que empiezan y terminan en A son 5^5, por lo que se tienen en total, por el principio de inclusión-exclusión:

$$5^7 - 2 \cdot 5^6 + 5^5 = 5^5(25 - 10 + 1) = 16 \cdot 5^5 = 50000.$$

2. *a*) Tomemos un subconjunto de n elementos del dominio. Hay $n!$ funciones sobreyectivas de este subconjunto en el codominio. Y cada una de ellas puede extenderse a una sobreyectiva del conjunto total, enviando por ejemplo los $m - n$ elementos restantes a uno fijo. Hay entonces más de $n!$ funciones sobreyectivas definidas en el conjunto de m elementos.

   b) Fijemos un elemento en el dominio (que tiene $m+1$ elementos). Tiene n imágenes posibles. Supongamos que ese elemento se llama a y que su imagen se llama o. Tenemos $f(a) = o$. Hay $\mathrm{Sob}(m, n-1)$ funciones sobreyectivas tales que o tiene a a como única preimagen, y $\mathrm{Sob}(m, n)$ funciones sobreyectivas tales que o tiene más de una preimagen. Como tenemos n posibilidades para o, deducimos que la cantidad total de funciones sobreyectivas a contar ($\mathrm{Sob}(m+1, n)$) es $n(\mathrm{Sob}(m, n) + \mathrm{Sob}(m, n-1))$.

   c) Fijemos $n \geq 2$. Para $k = 0$, se tiene $\mathrm{Sob}(n, n) = Biy(n) = n! = (0+1)n!$, por lo que se cumple. Supongamos ahora que vale para k, vamos a probarlo para $k+1$ usando la parte anterior y que $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Sob}(n+k+1, n) = n(\mathrm{Sob}(n+k, n) + \mathrm{Sob}(n+k, n-1)) \geq n((k+1)n! + (n-1)!) = \\ &= n(k+1)n! + n! \geq (k+1)n! + n! = (k+2)n!.\end{aligned}$$

3. *a*) Por cada arista en K_6 debemos decidir si la colocamos o no en el subgrafo. Como son $\binom{6}{2} = \frac{6(6-1)}{2} = 15$ aristas en K_6, la cantidad de formas de elegir un subgrafo es 2^{15}.

   b) Si son no planos y tienen 6 vértices o bien son un $K_{3,3}$ o bien contienen a un K_5, o bien son una subdivisión elemental de un K_5.
   Los $K_{3,3}$ no cuentan porque todos sus vértices tienen grado 2 o más (grado 3).
   Los que son una subdivisión elemental de K_5 no cuentan porque tienen 5 vértices de grado superior a 4 y un vértice de grado 2.
   Queda contar los que contienen a un K_5. Serán o bien la unión disjunta de un K_5 con un K_1 (un punto) o bien un K_5 y un K_1 conectados por una arista. Estos cumplen con todos los requisitos. Tenemos 6 formas de elegir los vértices de K_5 y el de K_1 queda determinado y luego por cada elección habrá una opción no conexa y 5 opciones conexas. Total

$$6 \times 6 = 36.$$