Facultad de Ciencias
Centro de Matemática
Matemática Discreta

Examen Agosto 2020

Está permitido consultar material impreso o apuntes.
Justificar todas las respuestas.
Duración: 3 horas.

1. Se tiene una sucesión de grafos conexos sin ciclos (también llamados árboles) $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de forma tal que:

    - G_0 tiene un solo vértice.
    - Si $n \geq 1$, todos los vértices de G_n tienen grado 1 o 3.
    - G_n es el subgrafo de G_{n+1} generado por todos los vértices de grado 3.

    Se pide:

    a) Dibujar G_1, G_2 y G_3.

    b) Probar que para $n \geq 1$ la cantidad de vértices de grado 1 de G_n es $3 \cdot 2^{n-1}$. Sugerencia: hacer inducción en n.

    c) ¿Cuál es el número total de vértices de G_n?¿Cuál es la cantidad de aristas?

2. Con un mazo de 48 cartas españolas (sin comodines) se considera al siguiente juego: Se van sacando de a una las cartas desde arriba y por cada una se dice en voz alta de forma alternada el número 1 o el 2. Si al sacar una carta el número anunciado coincide con el de la carta sacada, el juego termina y se pierde. Por el contrario se gana si se agotan todas las cartas del mazo sin que se haya producido una de estas coincidencias.

    La probabilidad de ganar el juego se expresa

    $$P = \frac{G}{T},$$

    donde G es el número de configuraciones ganadoras y T es el número de configuraciones totales de las 48 cartas.

a) Probar que P puede verse como la probabilidad de que al distribuir al azar todas las cartas en dos cajas de forma equitativa (24 cartas en cada una), no quede ningún 1 en la primer caja y ningún 2 en la segunda. Es decir que si T' es la cantidad de formas de hacer dicha distribución y G' es la cantidad de distribuciones que cumplen que no hay ningún 1 en la primer caja y ningún 2 en la segunda, entonces

$$\frac{G'}{T'} = \frac{G}{T} = P.$$

b) Calcular T y T'.

c) Calcular G' y deducir la probabilidad P.

3. Sea $G = (V, E)$ un grafo y $\sim$ una relación de equivalencia en V. Definimos el multigrafo $\overline{G}$ cuyo conjunto de vértices es $V/\sim$, tal que entre dos clases $c_1, c_2 \in V/\sim$ hay tantas aristas como aristas de G unen vértices $x \in c_1$ e $y \in c_2$.

   (a) Probar que si G es conexo, entonces $\overline{G}$ también lo es.

   (b) Probar que si G admite un circuito Euleriano, entonces $\overline{G}$ también. ¿Es cierto el recíproco?

   (c) ¿Es cierto que si G admite un recorrido Euleriano abierto, entonces $\overline{G}$ también?