Facultad de Ciencias.
Centro de Matemática.
Matemática Discreta 2019

Examen Agosto 2019

1. Probar que todo natural mayor o igual a 2 es producto de primos.

2. *a*) Calcular $\mathrm{Sob}(6,2)$ y $\mathrm{Sob}(6,3)$ (recordamos que $\mathrm{Sob}(m,n)$ es la cantidad de funciones sobreyectivas de un conjunto de m elementos en uno de n elementos).

   b) Sea $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en S que tengan 3 clases de equivalencia y tales que 1 y 2 no estén relacionados y que 1 y 3 si lo estén?

3. Un árbol se dice **casi regular** si todos los vértices que no son hojas tienen el mismo grado. Sea T un árbol casi regular con n vértices.

   a) Probar que para todo $n \geq 1$, existe un árbol casi regular con n vértices.

   b) Probar que si n es impar, entonces T tiene una cantidad par de hojas.

   c) Probar que si $n-2$ es primo, hay, a menos de isomorfismo, exactamente dos árboles casi regulares con n vértices.

Solución Agosto

1. Para $n = 2$ es claro. Supongamos que vale para todo natural $k \leq n$, probémoslo para $n + 1$. Si $n + 1$ es primo, ya está. Si no lo es, entonces

$$n + 1 = a \cdot b, \text{ con } 2 \geq a, b \geq n.$$

Por hipótesis de induccón a y b se descomponen en producto de primos, y por lo tanto también $n + 1$.

2. *a*) La cantidad de funciones de un conjunto de 6 elementos es 2^6. Quitándole las funciones constantes (que son las no sobreyectivas) tenemos $Sob(6, 2) = 2^6 - 2 = 62$.
Razonando de manera análoga, hay que quitar de 3^6 las funciones constantes y las que tienen exactamente 2 elementos en su recorrido. Hay 3 funciones constantes y $3 \cdot 2^6$ funciones que tienen exactamente dos elementos en su recorrido. El resultado es entonces

$$Sob(6, 3) = 3^6 - 3(1 + 2^6) = 3(3^5 - 1 - 2^6) = 3 \cdot 178 = 534.$$

b) Hay tres clases de equivalencia: la del 1, la del 2 y otra que llamaremos C en las que tenemos que colocar a los elementos del 4 al 9 (el 3 ya está colocado en la clase del 1). Tenemos que contar entonces la cantidad de funciones de $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ en $\{[1], [2], *\}$ que no dejen la clase C vacía, esto es $3^6 - 2^6 = 729 - 64 = 665$.

3. *a*) Para $n = 1, 2, 3$ el único grafo conexo posible lo verifica. Para $n \geq 4$ el grafo "estrella" tiene $n - 1$ hojas y un vértice conectado con todas ellas. Es por lo tanto casi regular.

b) Combinando el lema de Handshaking, el hecho de que un árbol con n vértices tiene $n - 1$ aristas, y la casi regularidad (suponiendo que tiene h hojas y que los vértices que no son hojas tienen grado k), se tiene:

$$2n - 2 = h + k(n - h).$$

El término de la izquierda es par. Si fuera h impar, entonces $n - h$ es par (puesto que n es impar), y como h es impar, se tendría que el término de la derecha es impar. Por lo tanto h es par.

c) La igualdad de la parte anterior puede escribirse así:

$$n - 2 = h(1 - k) + n(k - 1) = (k - 1)(n - h)$$

Si $n - 2$ es primo, se tienen dos posibilidades:

- $k - 1 = 1, n - h = n - 2$, que corresponde a $k = h = 2$, esto es un árbol con 2 hojas y tal que los vértices tienen grado 2. Esto es el grafo línea.
- $k - 1 = n - 2, n - h = 1$, que corresponde a $h = k = n - 1$, esto es un árbol estrella con $n - 1$ hojas y un vértices conectado con todas las demás.