Práctico 10

En los ejercicios que siguen los espacios son de dimensión finita.

1. Se consideran las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -13 & -1 & 16 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Probar que son nilpotentes[1]. Hallar sus polinomios minimales y sus formas de Jordan.

2. En cada uno de los casos siguientes encontrar la forma canónica de Jordan y una base de Jordan.

   a) $T = L_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

   b) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x])$ definido por $T\big(p(x)\big) = p'(x) + 2p(x)$.

   c) $T = L_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ donde $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ -4 & 6 & -3 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Para cada una de las siguientes matrices A, encontrar su forma de Jordan J y una matriz Q tal que $J = Q^{-1} A\, Q$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. ¿Cuáles de las siguientes matrices son semejantes entre sí?

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -7 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Sean V un espacio que tiene una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $T \in \mathcal{L}(V)$ tales que $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 4 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & -6 & 7 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

   a) Definimos $w_3 = v_1 + 2v_2 + v_3$ y $w_4 = 2v_1 + v_2 - v_4$. Probar que $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, w_3, w_4\}$ es una base de V y calcular $[T]_{\mathcal{C}}$.

[1] Una matriz cuadrada A es *nilpotente* si existe algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$.

b) Hallar la forma de Jordan de T y una base de Jordan correspondiente.

6. Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (-y - z,\ x + y,\ y + 2z), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Hallar su forma de Jordan y una base de Jordan correspondiente.

7. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   a) Hallar su forma de Jordan J. *Sugerencia:* tener en cuenta el ejercicio anterior.

   b) Hallar una matriz invertible Q tal que $A = QJQ^{-1}$.

8. Sea $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$ que verifica $T^4 = 5T^3 - 3T^2 - 9T$ y se sabe que T es sobreyectiva.

   a) Encontrar todos los posibles polinomios minimales de T.

   b) Si además T no es diagonalizable, hallar todas las posibles formas de Jordan de T y los respectivos polinomios característicos.

9. Sea V el subespacio de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ generado[2] por las funciones e^x, xe^x, x^2e^x y e^{2x}. Definimos $T : V \to V$ por $T(f) = f'$. Encontrar la forma de Jordan y una base de Jordan correspondiente.

10. Sean $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de un espacio V y $T \in \mathcal{L}(V)$ tales que $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

    Probar que si $\mathcal{C} = \{v_n, v_{n-1}, \ldots, v_2, v_1\}$, entonces $[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$.

11. Sea $A \in M_n(\mathbb{k})$ tal que su polinomio característico se escinde.

    a) Probar que A^t es semejante a J^t, siendo J la forma de Jordan de A.

    b) Deducir que existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{k}^n$ tal que $[L_{A^t}]_{\mathcal{B}} = J^t$.

    c) Probar que existe una base $\mathcal{D}$ de $\mathbb{k}^n$ tal que $[L_{A^t}]_{\mathcal{D}} = J$. *Sugerencia:* recordar el ejercicio anterior.

    d) Probar que A y A^t tienen la misma forma de Jordan.

    e) Concluir que A y A^t son semejantes.

[2] Estas funciones forman un conjunto LI; asumirlo o probarlo si se quiere.