Lista de pruebas para el examen teórico de Álgebra Lineal II

Andrés Abella

9 de diciembre de 2020

Para el examen teórico se espera que conozcan todas las definiciones, ejemplos, aplicaciones y enunciados de los teoremas del curso, así como las demostraciones de la lista siguiente. Las pruebas a estudiar son las de las notas del curso en su última versión, con fecha 3/12/2020.

1. Diagonalización

1.1. Operadores diagonalizables

1.2. Valores y vectores propios

1.3. Polinomio característico

Proposición 1. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda \in \Bbbk$. Son equivalentes:*

1. *El escalar λ es un valor propio de T.*
2. $\operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{Id}) \neq \{0\}$.
3. *El operador $T - \lambda \operatorname{Id}$ no es invertible.*
4. *El escalar λ es raíz de $\chi_T(t)$.*

Corolario 2. *Si $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\dim V = n$, entonces T tiene a lo más n valores propios.*

Teorema 3. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ valores propios distintos de T y $v_1, \ldots, v_k$ vectores propios correspondientes. Entonces $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es LI.*

Corolario 4. *Si la dimensión de V es n y $T \in \mathcal{L}(V)$ tiene n valores propios distintos, entonces T es diagonalizable.*

1.4. Multiplicidad geométrica y algebraica

Teorema 5. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y λ un valor propio de T, entonces $1 \leq MG(\lambda) \leq MA(\lambda)$.*

Proposición 6. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ valores propios distintos de T. Entonces $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_k}$ son subespacios independientes.*

Teorema 7. *Sean $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ sus valores propios. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *El operador T es diagonalizable.*
2. *El polinomio χ_T se escinde y $MG(\lambda_i) = MA(\lambda_i)$ para todo $i = 1, \ldots, h$.*
3. *Vale $V = \sum_{i=1}^{h} E_{\lambda_i}$.*
4. *Vale $V = \bigoplus_{i=1}^{h} E_{\lambda_i}$.*

2. Espacios con producto interno

2.1. Definiciones y propiedades básicas

Proposición 8. *Vale la siguiente igualdad* $||u+v||^2 = ||u||^2 + 2\operatorname{Re}(\langle u, v\rangle) + ||v||^2,\ \forall u, v \in V.$

Proposición 9. *Valen las siguientes propiedades.*

1. $||a\,v|| = |a|\,||v||$, *para todo* $v \in V$ *y* $a \in \Bbbk$.

2. $||v|| \geq 0$ *para todo* $v \in V$ *y* $||v|| = 0$ *si y solo si* $v = 0$.

3. Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $|\langle u, v\rangle| \leq ||u||\,||v||,\ \forall u, v \in V.$
   Además vale la igualdad si y solo si $\{u, v\}$ *es LD.*

4. Desigualdad triangular: $||u+v|| \leq ||u|| + ||v||,\ \forall u, v \in V.$

2.2. Ortogonalidad

Proposición 10. *Sea* $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ *un conjunto ortogonal de vectores no nulos y* $u \in [v_1, \dots, v_n]$.

$$\text{Si } u = \sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i,\ \text{ entonces } a_i = \frac{\langle u, v_i\rangle}{||v_i||^2},\ \forall i = 1, \dots, n.$$

Corolario 11. *Si* S *es un subconjunto ortogonal (finito o infinito) de* V *formado por vectores no nulos, entonces* S *es LI.*

Teorema 12 (Riesz). *Si* V *es de dimensión finita y* $\alpha \in V^*$, *entonces existe un único* $w \in V$ *tal que*

$$\alpha(v) = \langle v, w\rangle, \quad \forall v \in V.$$

Teorema 13. *Si* W *es un subespacio de dimensión finita de* V, *entonces* $V = W \oplus W^{\perp}$.

3. Operadores en espacios con producto interno

Proposición 14. *Sean* $T \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ *una base ortonormal de* V *y* $[T]_{\mathcal{B}} = (a_{ij})$. *Entonces* $a_{ij} = \langle T(v_j), v_i\rangle$, *para todo* $i, j = 1, \dots, n$.

3.1. Operadores autoadjuntos

Proposición 15. *Sea* $T \in \mathcal{L}(V)$, $\mathcal{B}$ *base ortonormal de* V *y* $A = [T]_{\mathcal{B}}$. *Entonces* T *es autoadjunto si y solo si* A *es simétrica en el caso real o hermitiana en el caso complejo.*

Corolario 16. *Sea* $T \in \mathcal{L}(V)$. *Si* $\Bbbk = \mathbb{R}$ *y* T *es diagonalizable en una base ortonormal o* $\Bbbk = \mathbb{C}$ *y* T *es diagonalizable en una base ortonormal con valores propios reales, entonces* T *es autoadjunto.*

Proposición 17. *Si* $T \in \mathcal{L}(V)$ *es autoadjunto y* $\lambda \in \mathbb{C}$ *es un valor propio de* T, *entonces* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema 18. *Si* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *es simétrica, entonces* A *tiene algún valor propio real (alcanza con saber una de las dos pruebas).*

Corolario 19. *Si* $T \in \mathcal{L}(V)$ *es autoadjunto, entonces* T *tiene algún valor propio.*

Proposición 20. *Si* $T \in \mathcal{L}(V)$ *es autoadjunto, entonces* T *es diagonalizable en una base ortonormal.*

Corolario 21. *Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es simétrica, entonces A es diagonalizable en $M_n(\mathbb{R})$.*

Teorema 22. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$.*

1. *Si $\Bbbk = \mathbb{R}$, entonces T es autoadjunto si y solo si T es diagonalizable en una base ortonormal.*
2. *Si $\Bbbk = \mathbb{C}$, entonces T es autoadjunto si y solo si T es diagonalizable en una base ortonormal y sus valores propios son reales.* $\square$

Proposición 23. *Sea $P \in \mathcal{L}(V)$. Entonces P es la proyección ortogonal sobre algún subespacio si y solo si P es una proyección y es un operador autoadjunto.*

3.2. El adjunto de un operador

Teorema 24. *Si $T \in \mathcal{L}(V)$, entonces existe un único $T^* \in \mathcal{L}(V)$ tal que $\langle T(v), w\rangle = \langle v, T^*(w)\rangle$, $\forall v, w \in V$.*

Proposición 25. *Sean $T, S \in \mathcal{L}(V)$ y $a \in \Bbbk$. Entonces*

$$(aT + S)^* = \bar{a}T^* + S^*, \qquad (T \circ S)^* = S^* \circ T^*, \qquad (T^*)^* = T, \qquad \mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}.$$

3.3. Operadores normales

Proposición 26. *Si $T \in \mathcal{L}(V)$ es diagonalizable en una base ortonormal de V, entonces T es normal.*

Proposición 27. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador normal. Entonces*

1. *$||T(v)|| = ||T^*(v)||$, $\forall v \in V$.*
2. *Si v es un vector propio de T correspondiente al valor propio λ, entonces v es un vector propio de T^* correspondiente al valor propio $\overline{\lambda}$.*
3. *Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son valores propios de T con vectores propios correspondientes v_1 y v_2, entonces $v_1 \perp v_2$.*

Proposición 28. *Si $\Bbbk = \mathbb{C}$ y $T \in \mathcal{L}(V)$ es normal, entonces T es diagonalizable en una base ortonormal*

3.4. Isometrías

Proposición 29. *Si $T \in \mathcal{L}(V)$, entonces T es una isometría si y solo si T preserva la norma*

$$\|T(v)\| = \|v\|, \quad \forall v \in V.$$

Proposición 30. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

$$T \text{ es una isometría}; \qquad T^* \circ T = \mathrm{Id}; \qquad T \circ T^* = \mathrm{Id}; \qquad T \text{ es un isomorfismo y } T^{-1} = T^*.$$

Teorema 31. *Consideramos matrices en $M_n(\Bbbk)$.*

1. *Si $\Bbbk = \mathbb{C}$, entonces una matriz es normal si y solo si es unitariamente equivalente a una matriz diagonal.*
2. *Si $\Bbbk = \mathbb{R}$, entonces una matriz es simétrica si y solo si es ortogonalmente equivalente a una matriz diagonal.*

4. Formas bilineales simétricas

4.1. Formas bilineales

4.2. Formas bilineales simétricas

Proposición 32. *Sea $A \in M_n(\mathbb{k})$ una matriz simétrica. Consideramos la forma bilineal simétrica $\beta_A \in \mathrm{Bil}_S(\mathbb{k}^n)$ y el operador $L_A \in \mathcal{L}(\mathbb{k}^n)$. Entonces el radical de β_A coincide con el núcleo de L_A.*

Proposición 33. *Si $\varphi \in \mathrm{Bil}_S(V)$, entonces* $\dim \mathrm{Rad}\,(\varphi) + \mathrm{rango}(\varphi) = \dim V$.

4.3. Diagonalización

Teorema 34. *Si $\varphi \in \mathrm{Bil}_S(V)$, entonces existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ es una matriz diagonal.*

4.4. Formas bilineales simétricas reales

Teorema 35 (Ley de inercia de Sylvester)**.** *La cantidad de entradas positivas, negativas y nulas de una matriz diagonal asociada a una forma cuadrática no depende de la representación diagonal.*

Teorema 36. *Sea $\varphi \in \mathrm{Bil}_S(V)$. Entonces las cantidades de entradas diagonales positivas, negativas y nulas de una representación matricial diagonal arbitraria de φ coinciden respectivamente con las cantidades de valores propios positivos, negativos y nulos de una representación matricial arbitraria de φ.*

Corolario 37. *Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Entonces la cantidad de entradas diagonales positivas, negativas y nulas de cualquier matriz diagonal congruente con A coincide respectivamente con la cantidad de valores propios positivos, negativos y nulos de A.*

Teorema 38. *Sea $\varphi \in \mathrm{Bil}_S(V)$, siendo V un espacio vectorial real con producto interno. Entonces existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V tal que $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ es diagonal.*

5. Transformaciones lineales y polinomios

Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ arbitrario fijo.

5.1. Subespacios invariantes

5.2. Polinomios evaluados en operadores

Proposición 39. *Existe un polinomio no nulo $p(t)$ tal que $p(T) = 0$.*

5.3. El teorema de Cayley-Hamilton

Proposición 40. *Sea $0 \neq v \in V$, $W = S_{v,T}$ y $h = \dim W$. Entonces:*

1. *El conjunto $\left\{v, T(v), \ldots, T^{h-1}(v)\right\}$ es base de W.*
2. *Si escribimos $T^h(v) = a_0\, v + a_1\, T(v) + \cdots + a_{h-1} T^{h-1}(v)$, entonces*

$$\chi_{T|_W}(t) = (-1)^h \left(t^h - a_{h-1}\, t^{h-1} - \cdots - a_1\, t - a_0\right).$$

Teorema 41 (Cayley-Hamilton)**.** *El polinomio característico de T se anula en T,* i. e. $\chi_T(T) = 0$.

5.4. Polinomio minimal

Teorema 42. *Existe un único polinomio $m_T(t) \in \Bbbk[t]$ que verifica:*

1. *$m_T(T) = 0$.*
2. *$m_T(t)$ es de grado mínimo entre los polinomios no nulos que se anulan en T.*
3. *$m_T(t)$ es mónico.*

Además $m_T(t)$ divide a todo polinomio que se anule en T.

Teorema 43. *El operador T es diagonalizable si y solo si $m_T(t)$ es de la forma*

$$m_T(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_h),$$

con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.

Corolario 44. *Si existe un polinomio de la forma $p(t) = a(t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_k)$, con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$ y $0 \neq a \in \Bbbk$ tal que $p(T) = 0$, entonces T es diagonalizable.*

Lema 45. *Sea $p(t) \in \Bbbk[t]$ y v un vector propio de T correspondiente a un valor propio λ, entonces*

$$p(T)\,(v) = p(\lambda)\, v.$$

Teorema 46. *El polinomio característico de T y el polinomio minimal de T tienen las mismas raíces.*

6. Forma de Jordan

En lo que sigue $T \in \mathcal{L}(V)$ es un operador arbitrario fijo.

6.1. Forma de Jordan

Observación 47. Acá tienen que saber probar lo que hay en la observación 6.1.5 de las notas.

Proposición 48. *Sea $\lambda \in \Bbbk$ y $\mathcal{C}$ un ciclo correspondiente a λ. Entonces λ es un valor propio de T y el vector inicial de $\mathcal{C}$ es un vector propio correspondiente a λ.*

Proposición 49. *Sea λ un valor propio de T y $\mathcal{C}$ un ciclo correspondiente a λ. Entonces $\mathcal{C}$ es LI.*

Proposición 50. *Sean $\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_h$ ciclos de T correspondientes a un mismo valor propio λ. Si sus vectores iniciales forman un conjunto LI, entonces $\mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_h$ es LI.*

Teorema 51. *Sean $\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_h$ ciclos de T correspondientes a valores propios que pueden ser distintos. Si los ciclos correspondientes a los mismos valores propios son tales que sus vectores iniciales forman un conjunto LI, entonces $\mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_h$ es un conjunto LI.*

6.2. Cálculo de la forma de Jordan

Proposición 52. *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador cuyo polinomio característico se escinde y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ los valores propios distintos de T. Sea $\mathcal{B}$ una base de Jordan correspondiente a T. Ordenamos $\mathcal{B}$ agrupando los ciclos que corresponden a los mismos valores propios. Luego obtenemos*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_h \end{pmatrix},$$

siendo $A_1, \ldots, A_h$ de la forma $A_i = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix}$, en que $J_1, \ldots, J_k$ son bloques de Jordan correspondientes al mismo valor propio λ_i. Entonces para cada $i = 1, \ldots, h$, vale

- *El orden del bloque A_i es la multiplicidad algebraica de λ_i.*
- *La cantidad k de bloques de Jordan contenidos en A_i es la multiplicidad geométrica de λ_i.*