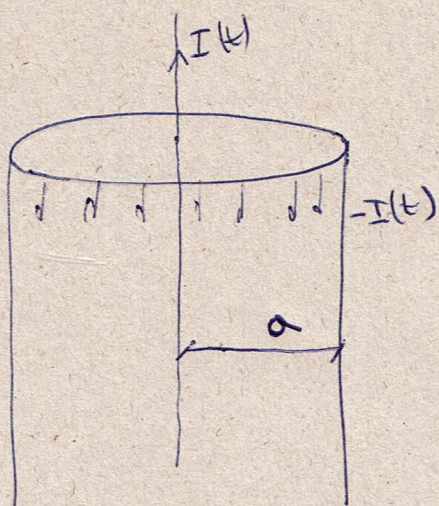




Ecuaciones de Maxwell en el vacío ①

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left[\vec{J} + \vec{J}_D \right] \text{ con } \vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- La aproximación cuasi-estacionaria consiste en despreciar $\vec{J}_D$ (se justifica al final)
- Asumimos que no se acumula carga en ningún lado por la forma de $I(t)$ [uniforme] $\Rightarrow \rho = 0$

$\Rightarrow$ Resolvemos

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Diferencial} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{array} \right.$	$\longleftrightarrow$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Integral} \\ (1) \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{①} \\ (2) \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \\ (3) \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \text{②} \\ (4) \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \end{array} \right.$
--	-----------------------	--

- * El flujo magnético Φ_B y la corriente I se calculan en una superficie de borde C
- ① S es una superficie cerrada arbitraria

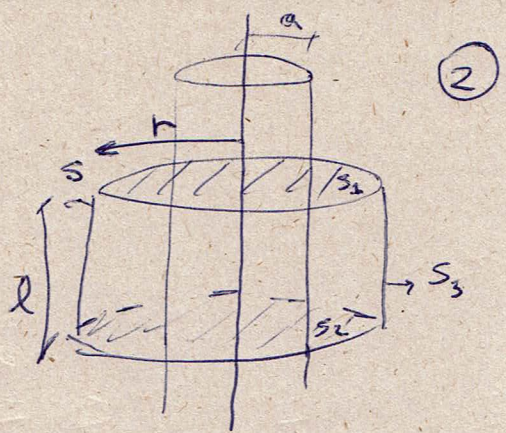
Usando coordenadas cilíndricas (ρ = distancia al eje, z altura a lo largo del eje y ϕ = ángulo en torno al eje) se tiene simetría de revolución en ϕ y de traslación en z

$$\Rightarrow \begin{aligned} \vec{B} &= B_\rho(\rho, t) \hat{\rho} + B_\phi(\rho, t) \hat{\phi} + B_z(\rho, t) \hat{z} \\ \vec{E} &= E_\rho(\rho, t) \hat{\rho} + E_\phi(\rho, t) \hat{\phi} + E_z(\rho, t) \hat{z} \end{aligned}$$

• Usando una superficie cilíndrica como la de la figura

$$(1) \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

$\underbrace{S_1 \quad S_2 \quad S_3}_{\substack{\text{se cancelan} \\ \text{por simetría de } \vec{E}}}$



$$\Rightarrow \int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi r l E_\rho(r, t) = 0 \Rightarrow \boxed{E_\rho = 0}$$

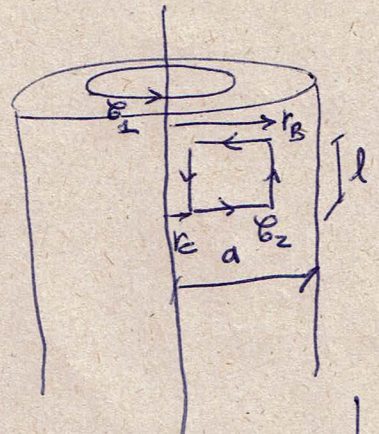
Idem para $\boxed{B_\rho = 0}$

• Usando (4) en el camino $\mathcal{C}_1$ de la figura y la simetría de $\vec{B}$:

$$\oint_{\mathcal{C}_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \begin{cases} I(t) & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

$$2\pi r B_\phi(r, t) = \mu_0 \begin{cases} I(t) & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{B_\phi(r, t) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}}$$



• Usando (4) en el camino $\mathcal{C}_2$ de la figura y la simetría de $\vec{B}$ y $B_\rho = 0$: $\oint_{\mathcal{C}_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$

$$l[B_z(r_B, t) - B_z(r, t)] = 0 \Rightarrow B_z \text{ no depende de } r$$

Resumiendo tenemos:

$$\vec{E} = E_\phi(r, t) \hat{\phi} + E_z(r, t) \hat{z}$$

$$\vec{B} = B_z(t) \hat{z} + \begin{cases} \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

• Usando Faraday (4) en $\mathcal{C}_1 \Rightarrow$

(3)

$$\underbrace{\oint_{\mathcal{C}_1} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}_{2\pi r E_\phi(r,t)} = - \underbrace{\frac{d\Phi_B}{dt}}_{-\pi r^2 \dot{B}_z(t)}$$

$$\Rightarrow E_\phi(r,t) = -\frac{r}{2} \dot{B}_z(t) \text{ pero sabemos que } E \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

$\Rightarrow B_z$ es independiente de t

$\hookrightarrow$ (a su vez $E_\phi = 0$)

• Podemos dejar $B_z \neq 0$ o igualarlo a cero para tener una condición de borde razonable.

Fijamos $B_z = 0$

• Usando Faraday (4) en $\mathcal{C}_2 \rightarrow$

$$\underbrace{\oint_{\mathcal{C}_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}_{l[E_z(r_B,t) - E_z(r_C,t)]} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\boxed{r_B < a}:$$

$$l[E_z(r_B,t) - E_z(r_C,t)] = + \frac{d}{dt} \int_0^l dz \int_{r_C}^{r_B} \rho B_\phi(\rho,t)$$

$$E_z(r_B,t) - E_z(r_C,t) = \dot{I}(t) \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{r_C}^{r_B} \frac{d\rho}{\rho} = \dot{I}(t) \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(r_B/r_C)$$

$$\boxed{r_C > a}:$$

$$E_z(r_B,t) - E_z(r_C,t) = 0$$

$\Rightarrow E_z$ no depende de ρ a fuera, pero $\vec{E} \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} 0$

$$\Rightarrow \boxed{E_z = 0 \text{ a fuera}}$$

$$\boxed{E_z(\rho,t) = \dot{I}(t) \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(\rho/a)}$$

usando $E(a,t) = 0$

Finalmente :

$$\vec{E} = \hat{z} \begin{cases} \dot{I}(t) \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(\rho/a) & \rho < a \\ 0 & \rho \geq a \end{cases} \quad (4)$$

$$\vec{B} = \hat{\phi} \begin{cases} \frac{\mu_0}{2\pi\rho} I(t) & \rho < a \\ 0 & \rho > a \end{cases}$$

$$\vec{I}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \hat{z} \begin{cases} \frac{\mu_0 \epsilon_0}{2\pi} \ddot{I}(t) \ln(\rho/a) & \rho < a \\ 0 & \rho \geq a \end{cases}$$

$$I_D = \oint_{S_a} \vec{I}_D \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a \rho d\rho \frac{\mu_0 \epsilon_0}{2\pi} \ddot{I}(t) \ln(\rho/a) =$$

$$= \mu_0 \epsilon_0 a^2 \int_0^1 dx x \ln(x) \ddot{I}(t) \stackrel{1/c^2}{=} \frac{\mu_0 \epsilon_0 a^2}{4} \ddot{I}(t)$$

Tabla de
Integrales (o wolfram alpha)

$$\Rightarrow \left[\frac{I_D}{I} = \frac{a^2 \omega^2}{4c^2} \right] \text{ usando la forma de } I(t)$$

Luego $\omega \sim 6 \times 10^{11}$ Hz para que $I_D \sim I$ cuando $a = 1 \text{ mm}$

Para frecuencia habituales de corriente alterna $\sim \text{Hz}$
la aproximación está bien justificada
($I \gg I_D$)